



آزمون ۲۲ دی ۱۴۰۲

اختصاصی دوازدهم ریاضی

دفترچه پاسخ

| نام درس | نام طراحان |
|---------------|--|
| حسابان ۲ | کاظم اجلالی - حسین شفیع زاده - علیرضا نداف زاده |
| ریاضیات گسسته | فرزاد جوادی - کیوان دارابی - مصطفی دیداری - محمد صحت کار - احمد رضا فلاح - مهرداد ملوندی |
| هندسه | اسحاق اسفندیار - سید محمد رضا حسینی فرد - کیوان دارابی - محمد صحت کار - هومن عقیلی - احمد رضا فلاح - مهرداد ملوندی |
| فیزیک | عبدالرضا امینی نسب - زهره آقامحمدی - علیرضا جباری - محمد راست پیمان - محمد جواد سورچی - معصومه شریعت ناصری - محمد رضا شریفی - مهدی شریفی - محمود منصوری - امیر احمد میرسعید - سیده ملیحه میر صالحی - حسام نادری - مجتبی نکوئیان |
| شیمی | علی امینی - احسان ایروانی - محسن بابامیری - عامر برزگر - محمد رضا جمشیدی - حسن رحمتی کوکنده - پویا رستگاری - مرتضی زارعی - محمد رضا زهرهوند - رضا سلیمانی - جواد سوری لکی - مبینا شرافتی پور - میلاد شیخ الاسلامی - حامد صابری - سهراب صادقی زاده - محمد جواد صادقی - امیر حسین طیبی - دانیال علی دوست - محمد فائز نیا - حسین ناصری نانی |

گزینشگران و ویراستاران

| نام درس | حسابان ۲ | هندسه | ریاضیات گسسته | فیزیک | شیمی |
|--------------------------------|---|------------------------------|------------------------------|---|---|
| گزینشگر | کاظم اجلالی حسین شفیع زاده علیرضا نداف زاده | کیوان دارابی محمد صحت کار | کیوان دارابی محمد صحت کار | حسام نادری | امیر حسین معروفی |
| گروه ویراستاری | مهدی ملار مضانی سعید خان بابایی محمد رضا راسخ | مهرداد ملوندی | مهرداد ملوندی | دانیال راستی مهدی شریفی زهره آقامحمدی | محمد حسن محمدزاده مقدم امیر حسین مسلمی امیر رضا حکمت نیا |
| بازبینی نهایی رتبه های برتر | سپهر تقی زاده | مهید خالتي | مهید خالتي | معین یوسفی نیا حسین بصیر ترکمبور | علی رضایی امیر رضا واشقانی احسان پنجه شاهی ماهان زواری |
| مسئول درس | عادل حسینی | امیر حسین ابومحبوب | امیر حسین ابومحبوب | حسام نادری | پارسا عیوض پور |
| مستندسازی | سمیه اسکندری | سرژ یقیا زاریان تبریزی | سرژ یقیا زاریان تبریزی | علیرضا همایون خواه | امیر حسین مرتضوی |

گروه فنی و تولید

| | |
|----------------|--|
| مدیر گروه | مهرداد ملوندی |
| مسئول دفترچه | نرگس غنی زاده |
| گروه مستندسازی | مدیر گروه: محیا اصغری مسئول دفترچه: الهه شهبازی |
| حروف نگار | فرزانه فتح اله زاده |
| ناظر چاپ | سوران نعیمی |

گروه آزمون

بنیاد علمی آموزشی قلمچی (وقف عام)

دفتر مرکزی: خیابان انقلاب بین صبا و فلسطین - پلاک ۹۳۳ - کانون فرهنگی آموزش - تلفن: ۰۲۱-۶۴۶۳



ریاضیات

گزینه ۳»

(مسئله شفیع زاده)

بهتر است هر چهار ضابطه را برای g در نظر بگیریم و برای تابع $f+g$ حد موردنظر را حساب کنیم؛
گزینه «۱»؛

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(f+g)(x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x(x-3) + (x-3)(x-6)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)(2x-9)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

گزینه «۲»؛

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(f+g)(x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x(x-3) + (x-3)^2} \\ = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)(2x-3)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

گزینه «۳»؛

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(f+g)(x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x(x-3) + (x-3)(x-7)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)(2x-10)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

گزینه «۴»؛

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(f+g)(x)} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x(x-3) + (x-3)(x-1)} \\ = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{(x-3)(2x-4)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی- هر در پی‌نوایت: صفحه‌های ۵۱ تا ۵۴)

گزینه ۴»

(مسئله شفیع زاده)

حد عبارت $\frac{1}{a-2\cos\pi x}$ در هر دو همسایگی چپ و راست $x=b$ برابر $-\infty$ شده است، پس $x=b$ ریشه مضاعف عبارت مخرج است.

$$a-2\cos\pi b = 0 \Rightarrow \cos\pi b = \frac{a}{2}$$

وقتی حاصل \cos برابر ± 1 شود، جواب مضاعف است؛

$$\Rightarrow \frac{a}{2} = \pm 1 \Rightarrow a = \pm 2$$

اما این نکته مهم است که عبارت مخرج در همسایگی $x=b$ باید منفی باشد، یعنی حالتی باشد که $a < 2\cos\pi x$ باشد ($a = -2$) و زمانی رخ می‌دهد که $\cos\pi x$ در مینیمم خودش باشد که در بازه $(0, \pi b) = (0, 2\pi)$ عبارت $\cos x$ در $x = \pi$ مینیمم می‌شود.

$$\Rightarrow \pi b = \pi \Rightarrow b = 1$$

$$\Rightarrow a + b = -1$$

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی- هر در پی‌نوایت: صفحه‌های ۵۱ تا ۵۴)

گزینه ۴»

(مسئله شفیع زاده)

در ضابطه تابع f ، عبارت $2 + \cos x$ بزرگ‌تر از ۱ است، پس ریشه ندارد. این یعنی مجانب‌های قائم نمودار تابع f فقط مربوط به مجانب‌های نمودار تابع $y = \tan 2x$ است.

$$2x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

در بازه $(\frac{\pi}{4}, \pi)$ تنها مجانب نمودار تابع $y = \tan 2x$ ، خط $x = \frac{3\pi}{4}$ است. از آن‌جا که عبارت $2 + \cos x$ مثبت است، وضعیت نمودار تابع f در همسایگی این خط، همان وضعیت نمودار تابع $y = \tan 2x$ در همسایگی خط است. در نتیجه گزینه «۴» درست است.

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی- هر در پی‌نوایت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸)

گزینه ۳»

(مسئله شفیع زاده)

ضابطه تابع f را $f(x) = mx + h$ و در نتیجه ضابطه تابع g را $g(x) = -\frac{1}{m}x + h'$ در نظر می‌گیریم. پس داریم:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{m}x - \frac{h}{m}, \quad g^{-1}(x) = -mx + mh'$$

و حال این ضابطه‌ها را در عبارت داده شده جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - g(x)}{f^{-1}(x) + g^{-1}(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{mx + h - (-\frac{1}{m}x + h')}{\frac{1}{m}x - \frac{h}{m} - mx + mh'} \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(m + \frac{1}{m})x}{(\frac{1}{m} - m)x} = \frac{m + \frac{1}{m}}{\frac{1}{m} - m} = \frac{m^2 + 1}{1 - m^2} = -\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow 2m^2 = 8 \Rightarrow m = \pm 2$$

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی- هر در پی‌نوایت: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

گزینه ۳»

(مسئله شفیع زاده)

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(\frac{-x - \sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f\left(-1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \\ = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - (x+1)}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(\frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f\left(1 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \\ = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x + (x+1)}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2x} = 2$$

(مسئله ۲- هرهای نامتناهی- هر در پی‌نوایت: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)



۶- گزینه «۴»

(مسئله شفیع زاده)

تابع داده شده، اگر بخواهد دو خط مجانب موازی محورهای مختصات داشته باشد، باید یک مجانب افقی و یک مجانب قائم داشته باشد، زیرا عبارت صورت ریشه ندارد. پس اگر نمودار تابع فقط یک مجانب قائم داشته باشد، عبارت مخرج باید ریشه مضاعف داشته باشد.

$$\Rightarrow \Delta = b^2 - 4a^2 = 0 \Rightarrow b = \pm 2a$$

$$\Rightarrow y = \frac{2x^2 + 3}{ax^2 \pm 4ax + 4a} = \frac{2x^2 + 3}{a(x \pm 2)^2}$$

محل تقاطع خطوط مجانب روی نیمساز ربع چهارم است، یعنی ریشه مخرج مقداری مثبت است. پس ضابطه با علامت منفی درست است.

$$\Rightarrow y = \frac{2x^2 + 3}{a(x-2)^2}$$

خط $x = 2$ مجانب قائم نمودار است و باید خط $y = -2$ مجانب افقی آن باشد:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 3}{a(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{ax^2} = \frac{2}{a} = -2 \Rightarrow a = -1$$

$$b = -4a \Rightarrow b = 4 \Rightarrow a - b = -5$$

(مسئله ۲- فرهای نامتناهی - هر در پی نوبت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ و ۶۷ تا ۶۹)

۷- گزینه «۲»

(مسئله شفیع زاده)

نمودار تابع f فقط یک مجانب افقی و یک مجانب قائم دارد و از آنجا که برخلاف سؤال قبلی، عبارت صورت ریشه دارد، دو حالت زیر امکان‌پذیر است:

الف) مخرج، ریشه مضاعف دارد:

$$\Delta = b^2 + 4a = 0$$

در این حالت ریشه مضاعف $x_0 = -\frac{b}{2a}$ است. همچنین معادله خط مجانب

افقی نمودار تابع $y = \frac{2}{a}$ است. در نتیجه از آنجا که نقطه تقاطع روی خط $y = x$ است باید داشته باشیم:

$$-\frac{b}{2a} = \frac{2}{a} \Rightarrow b = -4 \xrightarrow{\Delta=0} 16 + 4a = 0 \Rightarrow a = -2$$

در این حالت $a - b = 2$ است.

ب) عبارت دو ریشه دارد که یکی از ریشه‌های آن با یکی از ریشه‌های صورت مشترک است. چون ریشه‌های عبارت صورت $x = \pm 1$ هستند، عبارت مخرج را می‌توانیم به صورت‌های زیر بنویسیم:

$$\begin{cases} ax^2 + bx - 2 = (ax + 2)(x - 1) \\ \text{یا} \\ ax^2 + bx - 2 = (ax - 2)(x + 1) \end{cases}$$

در این ضابطه‌ها به ترتیب $x = -\frac{2}{a}$ و $x = \frac{2}{a}$ خط مجانب قائم نمودار

تابع است و در نتیجه نقطه تقاطع خطوط مجانب $(-\frac{2}{a}, \frac{2}{a})$ و $(\frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$

است که چون نقطه تقاطع روی خط $y = x$ قرار دارد، حالت امکان‌پذیر

$(\frac{2}{a}, -\frac{2}{a})$ است و داریم:

$$ax^2 + bx - 2 = (ax - 2)(x + 1) = ax^2 + (a - 2)x - 2$$

$$\Rightarrow b = a - 2 \Rightarrow a - b = 2$$

در نهایت فقط یک مقدار برای $a - b$ وجود دارد.

(مسئله ۲- فرهای نامتناهی - هر در پی نوبت: صفحه‌های ۵۵ تا ۵۸ و ۶۷ تا ۶۹)

۸- گزینه «۳»

(کلاظم ایلالی)

ترتیب تبدیلات را روی ضابطه تابع داده شده انجام می‌دهیم:

$$y = x^2 - 2x + 3 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور عرض‌ها}} y = x^2 + 2x + 3$$

$$\xrightarrow{\text{عرض نقاط در } |k|} y = |k|(x^2 + 2x + 3)$$

$$\xrightarrow{|k| \text{ واحد به سمت پایین}} y = |k|(x^2 + 2x + 3) - 2|k|$$

$$= |k|(x^2 + 2x + 1)$$

یعنی ضابطه مربوط به نمودار نهایی $y = |k|(x+1)^2$ است که نمودار این تابع به ازای همه مقادیر k بر محور طول‌ها مماس است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱ تا ۱۲)

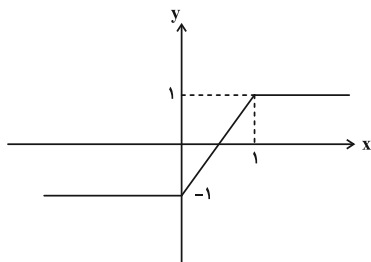
۹- گزینه «۱»

(کلاظم ایلالی)

دامنه تابع \mathbb{R} است و سعی می‌کنیم ضابطه تابع را ساده‌تر بنویسیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x-1}{|x|+|x-1|} \times \frac{|x|-|x-1|}{|x|-|x-1|} \\ &= \frac{(2x-1)(|x|-|x-1|)}{x^2 - (x-1)^2} = |x| - |x-1| \end{aligned}$$

نمودار تابع $f(x) = |x| - |x-1|$ را رسم می‌کنیم و می‌بینیم که این نمودار روی \mathbb{R} صعودی است.



(مسئله ۲- تابع: صفحه‌های ۱۵ تا ۱۸)



بنابراین جدول تعیین علامت عبارت زیر را دیکال به صورت زیر است.

| x | -۲ | ۰ | ۱ | ۳ |
|------------------|----|---|---|---|
| $f(x) - f(2x-1)$ | | - | - | + |
| $f(x^2) - f(3x)$ | | - | + | - |
| $f(x) - f(2x-1)$ | | + | - | + |
| $f(x^2) - f(3x)$ | | + | - | - |

پس داریم:

$$\frac{f(2x) - f(2x-1)}{f(x^2) - f(3x)} \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x < 0 \text{ یا } 1 \leq x < 3$$

$$\Rightarrow D_g = [-2, 0) \cup [1, 3)$$

پس اعداد صحیحی که در دامنه تابع قرار دارند عبارت انداز: ۲، ۱، -۱، -۲

(مسئله ۲- تابع: صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

(کلیه املایی)

۱۳- گزینه «۳»

روش اول: $P(x)$ بر $x-1$ بخش پذیر است؛ زیرا $P(1)$ برابر صفر است.

$$\Rightarrow P(x) = (x-1)Q(x) \quad (*)$$

حال $P(x)$ را به صورت زیر تجزیه می کنیم:

$$P(x) = x^9 - 5x + 5 - 1 = x^9 - 1 - 5(x-1)$$

$$= (x-1)(x^8 + x^7 + \dots + x + 1) - 5(x-1)$$

$$= (x-1)(x^8 + x^7 + \dots + x - 4)$$

پس $Q(x) = x^8 + x^7 + \dots + x - 4$ و باقی مانده تقسیم آن بر $x-1$ برابر $Q(1) = 8 - 4 = 4$ است.

روش دوم:

$$Q(x) = \frac{P(x)}{x-1}$$

$$\Rightarrow Q(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{P(x)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^9 - 5x + 4}{x-1}$$

$$\text{HOP} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{9x^8 - 5}{1} = 4$$

(مسئله ۲- تابع: صفحه های ۱۹ و ۲۰)

(علیرضا نرافزاده)

۱۴- گزینه «۱»

لازم است که ابتدا ضابطه تابع را ساده کنیم:

$$f(x) = \sin^2 ax (1 - \sin^2 ax) = \sin^2 ax \cos^2 ax$$

$$= \frac{1}{4} (4 \sin^2 ax \cos^2 ax) = \frac{1}{4} (\sin^2 2ax) = \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \cos 4ax}{2} \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{8} (1 - \cos 4ax)$$

دوره تناوب f از رابطه $T = \frac{2\pi}{4|a|} = \frac{\pi}{2|a|}$ به دست می آید.

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2|a|} = \frac{\pi}{8} \Rightarrow |a| = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{8} (1 - \cos 16x)$$

۱۰- گزینه «۱»

(کلیه املایی)

توجه کنید که اگر فرض کنیم $g(x) = k^x + 1$ و $h(x) = \log_k x$ باشد، $f(x) = (\log)(x)$ اگر $k > 1$ هر دو تابع g و h اکیداً صعودی اند و در نتیجه f اکیداً صعودی است. اگر $0 < k < 1$ ، توابع h و g اکیداً نزولی اند و در نتیجه f اکیداً صعودی است. بنابراین اگر $k \in (0, +\infty) - \{1\}$ ، تابع f اکیداً صعودی است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه های ۱۵ تا ۱۸)

۱۱- گزینه «۲»

(کلیه املایی)

به تبدیلات زیر توجه کنید:

$$y = f(x) \xrightarrow[\text{تقسیم بر ۲}]{\text{طول نقاط}} y = f(2x)$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به راست}} y = f(2(x-1)) = f(2x-2)$$

$$\xrightarrow[\text{بمحور طول ها}]{\text{قرینه نسبت}} y = -f(2x-2)$$

بنابراین ضابطه تابع نهایی به صورت زیر است:

$$g(x) = -\frac{1}{8}(2x-2)^3 - \frac{1}{4}m(2x-2)^2 - n(2x-2) + k$$

$$= -(x-1)^3 - m(x-1)^2 - n(2x-2) + k$$

$$= -x^3 + (3-m)x^2 + (2m-2n-3)x + 2n-m+k+1$$

چون نمودار رسم شده نمودار تابع $y = -x^3$ است، پس:

$$3-m=0 \Rightarrow m=3$$

$$2m-2n-3=0 \xrightarrow{m=3} n=\frac{3}{2}$$

$$2n-m+k+1=0 \xrightarrow{m=3, n=\frac{3}{2}} k=-1$$

پس $mnk = -\frac{9}{2}$ است.

(مسئله ۲- تابع: صفحه های ۱ تا ۱۴)

۱۲- گزینه «۳»

(کلیه املایی)

ابتدا ریشه های صورت و مخرج عبارت زیر را دیکال را حساب می کنیم:

$$f(x) - f(2x-1) = 0 \Rightarrow f(x) = f(2x-1) \Rightarrow x = 2x-1 \Rightarrow x = 1$$

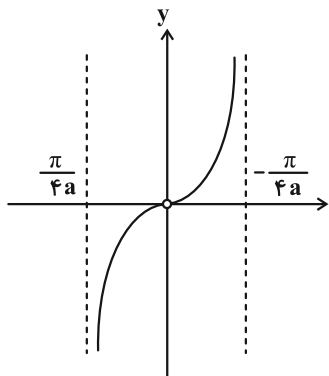
$$f(x^2) - f(3x) = 0 \Rightarrow f(x^2) = f(3x) \Rightarrow x^2 = 3x \Rightarrow x = 0, 3$$

و برای تعیین علامت این عبارت ها داریم:

$$f(x) - f(2x-1) > 0 \Rightarrow f(x) > f(2x-1) \Rightarrow x < 2x-1 \Rightarrow x > 1$$

$$f(x^2) - f(3x) > 0 \Rightarrow f(x^2) > f(3x) \Rightarrow x^2 < 3x \Rightarrow 0 < x < 3$$

نمودار تابع f از تقسیم طول نقاط نمودار تابع $y = -\frac{1}{4}\tan 2x$ بر a به دست می‌آید و از آنجا که تابع f اکیداً صعودی است، $a < 0$ است، پس داریم:



پس $\frac{\pi}{4a} = \frac{\pi}{8}$ و در نتیجه $a = -2$ است.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}\tan 2x$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\tan \frac{4\pi}{3} = \frac{1}{4}\tan\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۹ تا ۳۴)

(علیرضا نرافزاده)

گزینه «۳» ۱۷-

ابتدا ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a - \frac{b}{4}\sin(2cx + \frac{\pi}{4}) \Rightarrow f(x) = a - \frac{b}{4}\cos(2cx)$$

با مقایسه نمودارهای دو تابع f و $y = \cos x$ ، می‌بینیم که $-b > 0$ یا $b < 0$ است، اما c می‌تواند هر علامتی داشته باشد. حال داریم:

$$\begin{cases} y_{\max} = a - \frac{b}{4} = 3 \\ y_{\min} = a + \frac{b}{4} = -1 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -4$$

از طرفی $\frac{3}{4}$ برابر دوره تناوب، برابر $\frac{4\pi}{3}$ است، پس $T = \frac{8\pi}{3}$ است و داریم:

$$T = \frac{2\pi}{2|c|} = \frac{8\pi}{3} \Rightarrow |c| = \frac{3}{8}$$

$$\Rightarrow a|c| + \frac{b}{4} = \frac{3}{8} - 1 = -\frac{5}{8}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

(علیرضا نرافزاده)

گزینه «۳» ۱۸-

در تابع داده شده $f(0) = 1$ و بیش‌ترین مقدار برابر ۳ است:

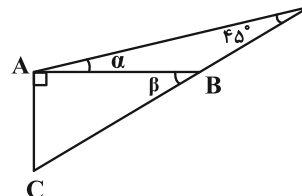
$$\begin{cases} f(0) = a + b \cos \frac{\pi}{4} = 1 \\ y_{\max} = a + |b| = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + \frac{b}{\sqrt{2}} = 1 \\ a + |b| = 3 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{4}\left(1 - \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{8}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

(علیرضا نرافزاده)

گزینه «۱» ۱۵-



β زاویه خارجی محسوب می‌شود و $\beta = \alpha + 45^\circ$ ، پس داریم:

$$\frac{AC}{AB} = \tan \beta = \tan(\alpha + 45^\circ) = \frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = \frac{1 + \left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} = 3$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{1}{3}$$

(مسئله ۲- مثلثات: صفحه ۴۲)

(علیرضا نرافزاده)

گزینه «۲» ۱۶-

ابتدا دامنه تابع $y = \frac{1}{\tan x - \cot x}$ و ضابطه ساده شده آن را به دست می‌آوریم:

$$\sin x \neq 0 \Rightarrow x \neq k\pi$$

$$\cos x \neq 0 \Rightarrow x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

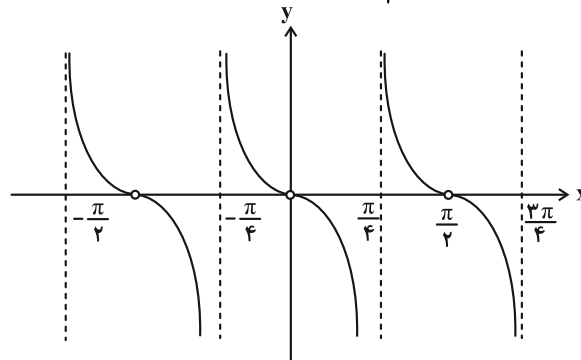
$$\tan x \neq \cot x \Rightarrow x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{k\pi}{2}, \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

با استفاده از اتحاد $\cot \theta - \tan \theta = 2 \cot 2\theta$ ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{1}{-2 \cot 2x} = -\frac{1}{2} \tan 2x$$

حال نمودار تابع $y = -\frac{1}{2} \tan 2x$ مطابق شکل زیر است:



زیرا:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}} y = \pm\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \frac{k\pi}{2}} y = 0$$



(علیرضا نرافزاده)

گزینه «۱» - ۱۹

ابتدا معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$1 - \sin^2 x - \sin x = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 x + \sin x - \frac{3}{4} = 0$$

پس داریم:

$$\left(\sin x + \frac{3}{4}\right)\left(\sin x - \frac{1}{4}\right) = 0 \xrightarrow{-1 \leq \sin x \leq 1} \sin x = \frac{1}{4}$$

در بازه $[-\frac{\pi}{2}, \pi]$ سینوس دو زاویه $x_1 = \frac{\pi}{6}$ و $x_2 = \frac{5\pi}{6}$ برابر $\frac{1}{4}$ است.

$$\Rightarrow \alpha = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{3}$$

و در نهایت داریم:

$$\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1 + \tan \frac{2\pi}{3}}{1 - \tan \frac{2\pi}{3}} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} = \sqrt{3} - 2$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۴)

(علیرضا نرافزاده)

گزینه «۳» - ۲۰

از تغییر متغیر $\frac{1}{\sin x \cos x} = A$ استفاده می‌کنیم:

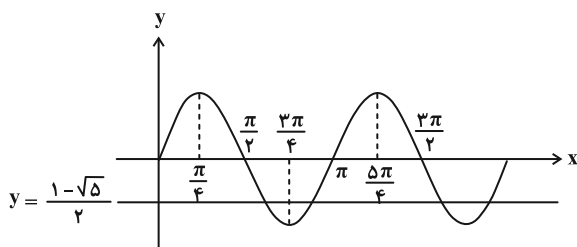
$$\Rightarrow A^2 + 2A - 4 = 0 \Rightarrow A = -1 \pm \sqrt{5}$$

پس داریم:

$$A = \frac{2}{\sin 2x} = -1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow \sin 2x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

که حالت $\sin 2x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ امکان‌پذیر نیست.

$$\Rightarrow \sin 2x = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

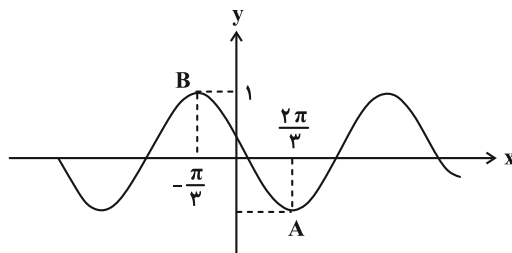
نمودار تابع $y = \sin 2x$ مطابق شکل زیر است:مطابق شکل، خط $y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ نمودار تابع $y = \sin 2x$ را در بازه(۰, $\frac{3\pi}{4}$) در ۲ نقطه قطع می‌کند.

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۴)

برای بحث در مورد پارامترهای b و c ابتدا نمودار تابع

$$g(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

را رسم می‌کنیم:



با مقایسه نمودارهای دو تابع f و g ، می‌توان نتیجه گرفت که نمودار تابع g یا نسبت به هیچ کدام از محورهای مختصات قرینه نشده است و یا نسبت به هر دو محور (مبدأ مختصات) قرینه شده است، تا به نمودار تابع f تبدیل شود. پس در دو حالت بررسی می‌کنیم:

الف) $b < 0, c < 0$

یعنی نمودار تابع g نسبت به مبدأ مختصات قرینه شده است، پس طول متناظر نقطه B واقع بر نمودار تابع f برابر $\frac{\pi}{3}$ است.

$$\Rightarrow -\frac{\pi}{3c} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow c = -\frac{1}{3}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases} a + \frac{b}{2} = 1 \\ a - b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{5}{3}, b = -\frac{4}{3}$$

اما کم‌ترین مقدار تابع $f(x) = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3}x\right)$ برابر $\frac{1}{3}$ است که با نمودار داده شده تطابق ندارد.

ب) $b > 0, c > 0$

یعنی نمودار تابع g نسبت به هیچ کدام از محورهای مختصات قرینه نشده است، پس طول متناظر نقطه A روی نمودار تابع f برابر $\frac{\pi}{3}$ است.

$$\Rightarrow \frac{2\pi}{3c} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow c = \frac{1}{3}$$

و از طرف دیگر داریم:

$$(*) \begin{cases} a + \frac{b}{2} = 1 \\ a + b = 3 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 4$$

پس نمودار رسم شده مربوط به تابع $f(x) = 4 \cos\left(\frac{1}{3}x + \frac{\pi}{3}\right) - 1$ است.

$$\Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 4 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 1 = 4 \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

$$= -4 \cos \frac{\pi}{3} - 1 = 4\left(-\frac{1}{2}\right) - 1 = -3$$

(حسابان ۲- مثلثات: صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)



۲۱- گزینه «۱»

(کیوان دارابی)

$$(12a^2, 9ab) = 3 | a | (4a, 3b)$$

اما b عددی فرد است پس عامل ۲ را ندارد. در نتیجه $3b$ نیز عامل ۲ را ندارد. بنابراین عامل ۲ در این ب. م. بی تأثیر است و می‌توانیم آن را کنار بگذاریم:

$$(4a, 3b) = (a, 3b)$$

از طرفی $a | b$ بنابراین $a | 3b$ و در نتیجه:

$$(a, 3b) = | a | \quad (12a^2, 9ab) = 3 | a | \times | a | = 3a^2$$

بنابراین:

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۳، ۱۶ و ۱۷)

۲۲- گزینه «۴»

(محمدرصدت کار)

مجموعه A مجموعه مضارب طبیعی مشترک اعداد ۹۹ و ۵۴ است. مجموعه مضارب مشترک دو عدد، مجموعه مضارب ک. م. م آن دو عدد است. بنابراین باید ابتدا ک. م. م ۹۹ و ۵۴ را به دست آوریم:

$$[99, 54] = [3^2 \times 11, 2 \times 3^3] = 2 \times 3^3 \times 11 = 594$$

$$A = \{594, 2 \times 594, 3 \times 594, \dots\} = \{594, 1188, 1782, \dots\}$$

دومین عضو این مجموعه عدد ۱۱۸۸ است.

برای یافتن رقم یکان عدد 1188^{1188} باید باقی‌مانده تقسیم آن را بر ۱۰ بیابیم:

$$1188^{1188} \equiv 8^{1188}$$

$$1188 \equiv 0$$

حالا باید توان یعنی ۱۱۸۸ را بر ۴ تقسیم کنیم:

بنابراین باید به جای ۱۱۸۸ عدد ۴ را قرار دهیم:

$$1188^{1188} \equiv 8^{1188} \equiv 8^4 \equiv (-2)^4 \equiv 16 \equiv 6$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۸ تا ۲۲)

۲۳- گزینه «۴»

(کیوان دارابی)

طبق فرض داریم:

$$a = b \times 19 + 20, \quad r < b \Rightarrow 20 < b$$

از طرفی:

$$a = 7k + 3 \Rightarrow a \equiv 3 \Rightarrow 19b + 20 \equiv 3$$

$$\Rightarrow 19b \equiv -17 \Rightarrow -2b \equiv 4 \Rightarrow b \equiv -2 \equiv 5$$

بنابراین:

$$b \equiv 5 \Rightarrow b = 7k' + 5, \quad 21 \leq b \Rightarrow b_{\min} = 7 \times 3 + 5 = 26$$

$$a_{\min} = b \times 19 + 20 = 26 \times 19 + 20 = 514$$

$$\Rightarrow \text{مجموع ارقام} = 5 + 1 + 4 = 10$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۴، ۱۵، ۱۹ تا ۲۲)

۲۴- گزینه «۱»

(فرزاد یواری)

طبق فرض داریم:

$$31024a \equiv 1 \Rightarrow a - 4 + 2 - 0 + 1 - 3 \equiv 1$$

$$\Rightarrow a \equiv 5 \Rightarrow a = 11k + 5 \Rightarrow a \in \{\dots, -6, 5, 16, 27, \dots\}$$

a یک رقم است پس a فقط می‌تواند ۵ باشد. بنابراین:

$$5535 \equiv 5 + 5 + 3 + 5 \equiv 18 \equiv 0$$

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۲ و ۲۳)

۲۵- گزینه «۱»

(فرزاد یواری)

اگر باقی‌مانده تقسیم عدد $10! - 7^{1402} + 3^{1402}$ بر ۲۱ را r بنامیم آن‌گاه خواهیم داشت:

$$3^{1402} + 7^{1402} - 10! \equiv r$$

با توجه به رابطه (پیمانه ab) $(a+b)^n \equiv a^n + b^n$ خواهیم داشت:

$$3^{1402} + 7^{1402} \equiv (3+7)^{1402} \equiv 10^{1402}$$

حالا باقی‌مانده تقسیم 10^{1402} را یک بار بر ۳ و یک بار بر ۷ پیدا می‌کنیم:

$$10^{1402} \equiv 1^{1402} \equiv 1$$

$$10^{1402} \equiv 3^{1402}$$

برای پیدا کردن باقی‌مانده تقسیم 3^{1402} بر ۷ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$3^2 \equiv 2 \Rightarrow 3^3 \equiv 6 \equiv -1 \Rightarrow 3^6 \equiv 1$$

اگر طرفین این رابطه را به توان ۲۳۳ برسانیم خواهیم داشت:

$$3^{1398} \equiv 1 \Rightarrow 3^{1402} \equiv 3^4 \equiv 81 \equiv 4$$

حالا می‌توانیم باقی‌مانده تقسیم عدد 10^{1402} بر ۲۱ را به صورت زیر حساب کنیم:

$$\begin{cases} 10^{1402} \equiv 1 \equiv 4 \\ 10^{1402} \equiv 3 \end{cases} \Rightarrow 10^{1402} \equiv 4$$

از طرفی دیگر در تجزیه عدد $10!$ هم عامل ۳ هم عامل ۷ وجود دارد پس این عدد بر ۲۱ بخش‌پذیر است و بنابراین:

$$3^{1402} + 7^{1402} - 10! \equiv 10^{1402} - 10! \equiv 4 - 0 \equiv 4$$

پس $r = 4$ است.

(ریاضیات گسسته - آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۱۹، ۲۲، ۲۹ و ۳۰)

۲۶- گزینه «۲»

(مهرزاد ملونری)

شرط وجود جواب معادله سیاله $(2m-1)x + (m+1)y = 11$ آن است که:

$$(2m-1, m+1) | 11$$

فرض می‌کنیم ب. م. م اعداد $2m-1$ و $m+1$ برابر با d باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases} d | 2m-1 \\ d | m+1 \end{cases} \Rightarrow d | 2m-1 \Rightarrow d | 3 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = 3$$

با توجه به این که ۱۱ مضرب ۳ نیست پس باید $(2m-1, m+1) = 1$ باشد.

برای یافتن تعداد اعداد مطلوب مانند m فرض می‌کنیم که ب. م. م اعداد $2m-1$ و $m+1$ برابر با ۳ باشد. در این شرایط خواهیم داشت:

$$3 | m+1 \Rightarrow m+1 = 3k \Rightarrow m = 3k-1$$

(معمّر صحت کار)

۲۶- گزینه «۲»

این گراف ۶ رأس دارد. اگر گراف G گرافی کامل بود

$$q(K_6) = \binom{6}{2} = 15$$

یال است پس این گراف، گرافی کامل بوده که یک یال آن حذف شده است. فرض می‌کنیم که یال حذف شده یال ab باشد. پس باید ابتدا تعداد کل دورهای به طول ۴ در گراف کامل مرتبه ۶ را حساب کنیم و سپس تعداد دورهای به طول ۴ که شامل یال ab هستند را از آن کم کنیم:

$$= \binom{6}{4} \times \frac{3!}{2} = 15 \times 3 = 45$$

حالا باید تعداد دورهای به طول ۴ شامل یال ab را حساب کنیم. هر دور به طول ۴ شامل یال ab به صورت $abxya$ است که x و y دو رأس از میان رأس‌های c, d, e و f هستند. بنابراین:

تعداد دورهای به طول ۴ شامل یال ab در گراف کامل مرتبه ۶

$$= \binom{4}{2} \times 2! = 6 \times 2 = 12$$

در این محاسبه، ۲! برای جایگشت‌های رأس‌های x و y در نظر گرفته شده است. بنابراین تعداد دورهای به طول ۴ در گراف G برابر است با:

$$45 - 12 = 33$$

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۷ تا ۳۹)

(اممرد رضا غلاج)

۳۰- گزینه «۴»

اگر m یال از یک گراف حذف کنیم از مجموع درجات رأس‌های این گراف $2m$ واحد کم می‌شود. بنابراین:

$$3p - 11 = 2m$$

از طرفی دیگر گراف حاصل گرافی ۸- منتظم است. مجموع درجات گراف K_p برابر با $p(p-1)$ و مجموع درجات رأس‌های گراف ۸- منتظم برابر با $8p$ است. بنابراین:

$$p(p-1) - (3p-11) = 8p \Rightarrow p^2 - p - 3p + 11 = 8p$$

$$\Rightarrow p^2 - 12p + 11 = 0 \Rightarrow (p-1)(p-11) = 0$$

$$\Rightarrow p = 1 \text{ یا } p = 11$$

p نمی‌تواند برابر ۱ باشد پس p برابر با ۱۱ است. بنابراین:

$$3 \times 11 - 11 = 2m \Rightarrow 2m = 22 \Rightarrow m = 11$$

حالا باید از گراف کامل مرتبه ۱۱، ۲۲ یال حذف کنیم. تعداد

یال‌های گراف کامل مرتبه ۱۱ برابر با $\frac{11 \times 10}{2} = 55$ است. اگر از این ۵۵

یال، ۲۲ یال را حذف کنیم ۳۳ یال باقی می‌ماند. می‌دانیم که مجموع درجات رأس‌های هر گراف برابر با دو برابر تعداد یال‌هاست. پس حاصل جمع درجات رأس‌های این گراف برابر با $2 \times 33 = 66$ است.

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۷ تا ۴۰)

برای یافتن تعداد اعدادی از مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 40\}$ که به شکل $3k-1$ هستند می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:

$$1 \leq 3k-1 \leq 40 \Rightarrow 1 \leq k \leq 13$$

بنابراین به ازای ۱۳ عضو مجموعه $\{1, 2, 3, \dots, 40\}$ م. ب. م اعداد $2m-1$ و $m+1$ برابر ۳ است. پس تعداد اعداد مطلوب برابر است با:

$$40 - 13 = 27$$

(ریاضیات گسسته-آشنایی با نظریه اعداد: صفحه‌های ۲۶ تا ۲۹)

(مصطفی بدراری)

۲۷- گزینه «۳»

گراف C_n ، گرافی ۲ منتظم است. بنابراین درجه هر رأس برابر با ۲است و حاصل ضرب درجات این رأس‌ها برابر با 2^n خواهد بود.

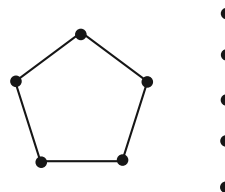
هر گراف P_n ، دو رأس درجه ۱ و $(n-2)$ رأس درجه ۲ دارد. پس حاصل ضرب درجات این رأس‌ها نیز برابر با $2^{(n-2)}$ است.

بنابراین حاصل ضرب درجات تمام رأس‌های این گراف برابر با

$$2^{(2n-2)} = 2^{(n-2)} \times 2^n \text{ است و در نتیجه خواهیم داشت:}$$

$$2^{(2n-2)} = 256 = 2^8 \Rightarrow 2n-2 = 8 \Rightarrow 2n = 10 \Rightarrow n = 5$$

متابین شکل، گراف C_5 دارای ۵ یال و گراف P_5 دارای ۴ یال است. پس این گراف ۱۰ رأس و $5 + 4 = 9$ یال دارد.



تعداد یال‌های گراف مکمل این گراف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$q(\bar{G}) = q(K_5) - q(G) = \frac{5 \times 4}{2} - 9 = 10 - 9 = 1$$

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۵ تا ۳۸)

(معمّر صحت کار)

۲۸- گزینه «۱»

در گراف‌های P_n اگر طول مسیر برابر با r باشد آن‌گاه دو رابطه زیر برقرار است:

$$\begin{cases} \text{تعداد کل مسیرها بین دو رأس متمایز} = \binom{n}{2} \\ \text{تعداد مسیرهای به طول } r = n - r \end{cases}$$

$$\binom{n}{2} = 45 \Rightarrow n = 10$$

بنابراین:

در گراف P_{10} طول مسیر حداکثر می‌تواند برابر ۹ باشد. بنابراین:

$$7 = 10 - 7 = 3 \text{ تعداد مسیرهای طول } 7$$

$$8 = 10 - 8 = 2 \text{ تعداد مسیرهای طول } 8$$

$$9 = 10 - 9 = 1 \text{ تعداد مسیرهای طول } 9$$

پس تعداد مسیرهای مطلوب برابر است با:

$$1 + 2 + 3 = 6$$

(ریاضیات گسسته-گراف و مدل‌سازی: صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)



۳۱- گزینه «۴»

(ممنوع صحت کار)

ماتریس‌های A و B وارون یکدیگرند بنابراین:

$$AB = BA = I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

 \Rightarrow درایه سطر اول ستون اول ماتریس BA

$$= \begin{bmatrix} x & 1 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y \\ x \\ -3 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow yx + x - 15 = 1$$

$$\Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |C| = 2 - (-5) = 7$$

$$|C^{-1}| = \frac{1}{|C|} = \frac{1}{7}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۲، ۲۳ و ۳۱)

۳۲- گزینه «۲»

(سیرمعمرها؛ مسینی فرد)

می‌دانیم ماتریس اسکالر مضربی از ماتریس واحد است پس $A = kI$ و داریم:

$$A^3 = k^3 I, A^2 = k^2 I$$

$$\Rightarrow k^3 I = k^2 I + 2kI \Rightarrow \underbrace{k^3 - k^2 - 2k}_k(k-2)(k+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k = 0 \Rightarrow |A| = 0 \\ k = -1 \Rightarrow |A| = 1 \\ k = 2 \Rightarrow |A| = 4 \end{cases}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۱۲ و ۲۷)

۳۳- گزینه «۱»

(مهردار ملونری)

$$\begin{cases} kx + my = 1 \\ (2k+1)x + ny = 1 \end{cases} \quad \text{دستگاه معادلات}$$

$$\frac{k}{2k+1} = \frac{m}{n} \neq \frac{1}{1} \quad (1)$$

$$\begin{cases} mx + ny = m - n \\ 2x + (k+3)y = m + n \end{cases} \quad \text{از طرفی دستگاه معادلات}$$

دارد، پس:

$$\frac{m}{2} = \frac{n}{k+3} = \frac{m-n}{m+n} \quad (2) \Rightarrow \frac{m}{n} = \frac{2}{k+3} \quad (3)$$

$$\xrightarrow{(1), (2)} \frac{k}{2k+1} = \frac{2}{k+3} \Rightarrow k^2 + 3k = 4k + 2$$

$$\Rightarrow k^2 - k - 2 = 0 \Rightarrow (k-2)(k+1) = 0 \Rightarrow k = 2, -1$$

به ازای $k = -1$ ، رابطه (۱) برقرار نیست، پس $k = 2$ و داریم:

$$\xrightarrow{(2)} \frac{m}{2} = \frac{n}{5} = \frac{m-n}{m+n}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{2} = \frac{m - \frac{5}{2}m}{m + \frac{5}{2}m} = \frac{-\frac{3}{2}m}{\frac{7}{2}m} = -\frac{3}{7} \Rightarrow m = -\frac{6}{7}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۵ و ۲۶)

۳۴- گزینه «۳»

(اسحاق اسفندیار)

ماتریس A وارون پذیر نیست، پس:

$$|A| = 0 \Rightarrow 2^3(a^2 - a) \times 2^a - 2^3 \times 2^2 = 0 \Rightarrow 2^3 a^2 - 2a = 2^5$$

$$3a^2 - 2a = 5 \Rightarrow a = -1, a = \frac{5}{3} \xrightarrow{a \geq 0} a = \frac{5}{3}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{5}{3} & 6 \\ \frac{5}{3} & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{6}{5} \\ \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} \text{ مجموع درایه‌های } = -\frac{3}{5} + \frac{6}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۳ و ۲۴)

۳۵- گزینه «۲»

(کیوان دارابی)

اگر ماتریس جدید را B بنامیم، آن‌گاه $b_{12} = 2a_{12} = 2 \times 2 = 4$ و

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3m & 1 \end{bmatrix} \quad b_{33} = ma_{33} = 3m$$

حال $|B| = |A|$ ؛ برای این منظور کافی است فقط اختلاف دو دترمینان را محاسبه کرده و برابر با صفر قرار دهیم:

$$|B| - |A| = 0$$

$$\Rightarrow (4-2) \times (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (3m-3) \times (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 2 + 7(3m-3) = 0 \Rightarrow 21m - 19 = 0 \Rightarrow m = \frac{19}{21}$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۷ تا ۳۰)

۳۶- گزینه «۲»

(کیوان دارابی)

مطابق فرض داریم:

$$||A|A + A| = 192 \Rightarrow (|A| + 1)A = 192$$

$$\Rightarrow (|A| + 1)^3 \times |A| = 192 = 4^3 \times 3 \Rightarrow |A| = 3$$

$$\Rightarrow ||2A|A| = |2A|^3 |A| = (2^3 |A|)^3 |A|$$

$$= 2^9 |A|^4 = 2^9 \times 3^4 = (2^2 \times 3)^4 \times 2 = 12^4 \times 2$$

(هندسه ۳- ماتریس و کاربردها؛ صفحه‌های ۲۹ تا ۳۱)

۳۷- گزینه «۴»

(ممنوع صحت کار)

اندازه مماس مشترک خارجی دو دایره از رابطه

$$TT' = \sqrt{d^2 - (r - r')^2} \quad \text{به دست می‌آید که در آن } d \text{ فاصله مراکز}$$

دو دایره و r و r' اندازه شعاع‌های دو دایره است.

$$\text{مرکز دایره به معادله } x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0 \text{ نقطه } C'(3, 1)$$

است. اندازه شعاع این دایره برابر است با:

$$r' = \frac{1}{2} \sqrt{36 + 4 - 24} = \frac{1}{2} \sqrt{16} = 2$$



بنابراین:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (5-2)^2} = 2\sqrt{2} \Rightarrow d^2 - 9 = 8$$

$$\Rightarrow d^2 = 17 \Rightarrow d = \sqrt{17}$$

پس فاصله مراکز دو دایره برابر با $\sqrt{17}$ است. برای یافتن مختصات نقطه C باید همه گزینه‌ها را بررسی کنیم:

گزینه «۱»: فاصله نقطه (۵، -۲) از نقطه $C'(3, 1)$ برابر است با:

$$\sqrt{25+16} = \sqrt{41}$$

گزینه «۲»: فاصله نقطه (۳، ۲) از نقطه $C'(3, 1)$ برابر است با:

$$\sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

گزینه «۳»: فاصله نقطه (۳، -۲) از نقطه $C'(3, 1)$ برابر است با:

$$\sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

گزینه «۴»: فاصله نقطه (۵، ۲) از نقطه $C'(3, 1)$ برابر است با:

$$\sqrt{1+16} = \sqrt{17}$$

پس نقطه مطلوب نقطه $C(2, 5)$ است.

(هنر سه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۰ تا ۴۴)

۳۸- گزینه «۱»

(هومن عقیلی)

ابتدا باید اندازه وتر AB را حساب کنیم. اگر از مرکز دایره

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4 \text{ یعنی نقطه } O(1, 1) \text{ خطی عمود بر وتر}$$

AB رسم کنیم تا در نقطه H این وتر را قطع کند آن‌گاه خواهیم داشت:

$$AH^2 = r^2 - OH^2$$

اندازه پاره خط OH برابر با فاصله نقطه $O(1, 1)$ از خط $3x + 4y - 2 = 0$ است:

$$OH = \frac{|3+4-2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{5}{5} = 1$$

اندازه شعاع دایره $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$ برابر با ۲ است. بنابراین:

$$AH^2 = r^2 - OH^2 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow AH = \sqrt{3} \Rightarrow AB = 2\sqrt{3}$$

حالا باید معادله دایره‌ای را بیابیم که مرکزش نقطه $C(\frac{1}{4}, 0)$ است و بر

خط $3x + 4y - 2 = 0$ وتر AB به طول $2\sqrt{3}$ را جدا می‌کند. برای این کار باید اندازه شعاع این دایره را حساب کنیم. اگر اندازه شعاع دایره مورد نظر برابر با R باشد، آن‌گاه:

$$R^2 = AH^2 + CH^2$$

اندازه پاره خط CH برابر با فاصله نقطه $C(\frac{1}{4}, 0)$ از خط $3x + 4y - 2 = 0$ است:

$$CH = \frac{|\frac{3}{4} + 0 - 2|}{\sqrt{9+16}} = \frac{5}{5} = 1 \Rightarrow R^2 = (\sqrt{3})^2 + 1^2 = \frac{49}{16}$$

بنابراین معادله دایره مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$(x - \frac{1}{4})^2 + y^2 = \frac{49}{16} \Rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{16} + y^2 = \frac{49}{16}$$

$$\Rightarrow 16x^2 - 8x + 1 + 16y^2 = 49 \Rightarrow 16x^2 + 16y^2 - 8x - 48 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - x - 6 = 0$$

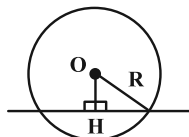
(هنر سه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۳ تا ۴۵)

۳۹- گزینه «۳»

(هومن عقیلی)

خط و دایره متقاطعند یعنی: $OH < R$; مختصات مرکز دایره می‌شود

$$O(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}) = (-\frac{1}{2}, -\frac{2}{2}) \text{ و شعاع دایره برابر است با:}$$



$$R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2} - fc}{2} = 1$$

OH فاصله مرکز دایره تا خط $3x + 4y - m = 0$ است که می‌شود:

$$OH = \frac{|3+4-m|}{\sqrt{9+16}}$$

$$OH < R \Rightarrow \frac{|11-m|}{5} < 1 \Rightarrow |11-m| < 5$$

$$\Rightarrow -5 < 11-m < 5 \Rightarrow 6 < m < 16$$

(هنر سه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۳ تا ۴۵)

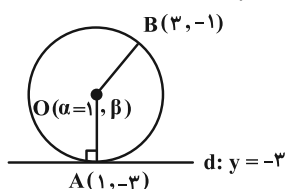
۴۰- گزینه «۲»

(امیررضا فلاح)

نقطه $A(1, -3)$ روی خط $d: y = -3$ قرار دارد. بدیهی است

مختصات مرکز دایره به صورت $O(\alpha, \beta)$ است. از طرفی

$$|OA| = |OB| \text{ و داریم:}$$



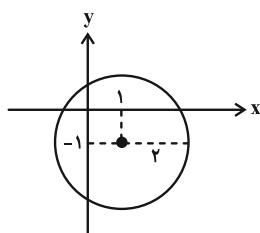
$$\sqrt{(1-1)^2 + (\beta+3)^2} = \sqrt{(1-3)^2 + (\beta+1)^2}$$

$$\beta^2 + 6\beta + 9 = 4 + \beta^2 + 2\beta + 1 \rightarrow \text{توان ۲}$$

$$\Rightarrow 4\beta = -4 \Rightarrow \beta = -1 \Rightarrow O(1, -1)$$

$$R = |OA| = \sqrt{(1-1)^2 + (-3+1)^2} = 2$$

مطابق شکل بیشترین فاصله محیط این دایره تا محور y ها برابر ۳ واحد می‌باشد.



(هنر سه ۳- آشنایی با مقاطع مخروطی: صفحه‌های ۳۳ تا ۴۶)



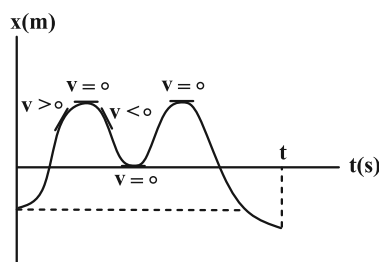
فیزیک

گزینه ۲» ۴۱-

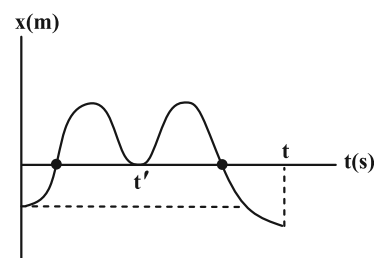
(مسام نادری)

بررسی موارد:

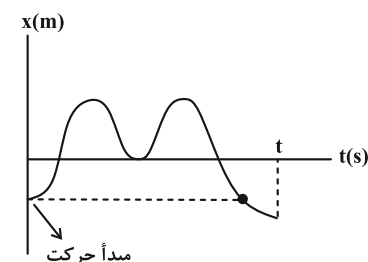
الف) درست؛ در نمودار مکان- زمان، لحظه‌ای که شیب خط مماس (یعنی سرعت لحظه‌ای) در آن صفر شود و علامت قبل و بعدش تغییر کند، لحظه تغییر جهت است که طبق شکل زیر، سه بار این اتفاق می‌افتد.



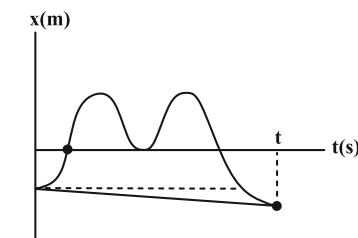
ب) نادرست؛ لحظه‌ای که نمودار، محور زمان را قطع کند و از آن عبور کند، لحظه‌ای است که از مبدأ مکان یعنی $x=0$ به‌طور کامل عبور کرده است که طبق شکل زیر دو بار این اتفاق می‌افتد. دقت کنید که در لحظه t' ، متحرک به مبدأ مکان رسیده ولی از آن به‌طور کامل عبور نکرده است.



ج) نادرست؛ بعد از آغاز حرکت، متحرک تنها یک بار از مبدأ حرکت عبور کرده است.



د) نادرست؛ در نمودار مکان- زمان، شیب خط واصل بین دو نقطه، سرعت متوسط را نشان می‌دهد که طبق شکل زیر، سرعت متوسط از لحظه صفر تا t ، منفی می‌شود.

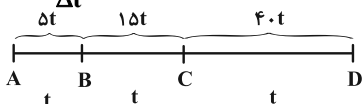


(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۲ تا ۱۳)

گزینه ۴» ۴۲-

(مبتنی کوثیان)

مطابق شکل زیر و با توجه به رابطه تندی متوسط ($s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$) داریم:



$$s_{avCD} = \frac{CD}{t} = 4.0 \Rightarrow CD = 4.0t$$

اختلاف تندی مسیر AB و BC، $1.0 \frac{m}{s}$ است و طول مسیر BC، سه

برابر AB است. با توجه به برابری زمان، تندی مسیر BC، $1.0 \frac{m}{s}$ بیشتر

از AB است، بنابراین:

$$s_{avBC} - s_{avAB} = 1.0 \Rightarrow \frac{BC}{t} - \frac{AB}{t} = 1.0$$

$$\frac{BC - AB}{t} = 1.0 \Rightarrow AB = \Delta t$$

$$s_{avT} = \frac{\ell_T}{\Delta t_T} = \frac{AB + BC + CD}{\Delta t_{AB} + \Delta t_{BC} + \Delta t_{CD}}$$

$$\Rightarrow s_{avT} = \frac{\Delta t + 1.5\Delta t + 4.0\Delta t}{3\Delta t} = 2.0 \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱ تا ۱۰)

گزینه ۱» ۴۳-

(زهره آقاممدری)

ابتدا معادله مکان- زمان دو متحرک را می‌نویسیم. اگر مکان متحرک A در لحظه شروع حرکت را مبدأ مختصات فرض کنیم، داریم:

$$x = vt + x_0 \Rightarrow \begin{cases} x_A = \frac{3}{2}vt \\ x_B = vt + 200 \end{cases}$$

دو بار فاصله دو متحرک از هم برابر ۵۰ متر است. یک بار قبل از رسیدن متحرک A به متحرک B و بار دوم پس از عبور متحرک A از متحرک B:

$$x_B - x_A = 50 \Rightarrow vt_1 + 200 - \frac{3}{2}vt_1 = 50$$

$$-\frac{1}{2}vt_1 = -150 \Rightarrow vt_1 = 300 \quad (1)$$

$$x_A - x_B = 50 \Rightarrow \frac{3}{2}vt_2 - vt_2 - 200 = 50$$

$$\frac{1}{2}vt_2 = 250 \Rightarrow vt_2 = 500 \quad (2)$$

در نهایت از رابطه‌های (۱) و (۲) داریم:

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{3}{5}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست؛ صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

گزینه ۴» ۴۴-

(علیرضا جباری)

ابتدا با استفاده از مقادیر داده شده روی نمودار، سرعت هر یک از دو متحرک را به دست می‌آوریم. باید توجه داشت که سرعت هر یک از دو متحرک ثابت است و می‌توان سرعت لحظه‌ای هر متحرک را با سرعت متوسط آن برابر دانست:



$$v_{t=7} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{56}{7-3} = 14 \frac{m}{s}$$

همچنین چون شیب خط مماس بر نمودار در مبدأ زمان برابر با صفر است، سرعت اولیه متحرک صفر است. بنابراین شتاب متوسط در ۷ ثانیه اول

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{14-0}{7-0} = 2 \frac{m}{s^2}$$

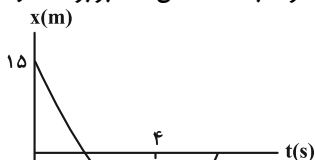
حرکت برابر است با:

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۲)

(زهره آقاممیری)

گزینه «۴»

متحرک در لحظه $t = 4s$ تغییر جهت می‌دهد. از لحظه صفر تا $t = 4s$ اندازه جابه‌جایی متحرک با مسافت طی شده برابر است و داریم:



$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} \cdot \frac{s_{av} = 4 \frac{m}{s}}{\Delta t = 4s} \rightarrow 4 = \frac{\ell}{4} \Rightarrow \ell = 16m \Rightarrow |\Delta x| = 16m$$

چون در این بازه جابه‌جایی خلاف جهت محور X است، داریم:

$$\Delta x = -16m$$

اکنون با استفاده از معادله جابه‌جایی - سرعت متوسط در بازه صفر تا ۴s، سرعت اولیه را به دست می‌آوریم. توجه کنید که در لحظه $t = 4s$ ، سرعت متحرک صفر است:

$$\frac{v_f + v_o}{2} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad v_f = 0, \Delta x = -16m \rightarrow \frac{0 + v_o}{2} = \frac{-16}{4} \Rightarrow v_o = -8 \frac{m}{s}$$

سپس با استفاده از معادله سرعت - زمان، شتاب حرکت به دست می‌آید:

$$v = at + v_o \xrightarrow{t=4s, v_f=0} 0 = 4a - 8 \Rightarrow a = 2 \frac{m}{s^2}$$

در نهایت معادله مکان - زمان را می‌نویسیم و مکان متحرک را در لحظه ۱۰s محاسبه می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_o t + x_o \quad a = 2 \frac{m}{s^2}, x_o = 15m, v_o = -8 \frac{m}{s}$$

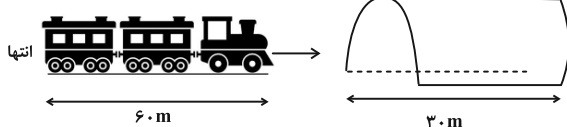
$$x = t^2 - 8t + 15 \xrightarrow{t=10s} x = 100 - 80 + 15 = 35m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

(مسلم تارری)

گزینه «۳»

برای خروج کامل قطار باید انتهای قطار کاملاً از تونل خارج شود، یعنی طول قطار به علاوه طول تونل را طی کند.



$$v_f^2 - v_o^2 = 2a\Delta x \quad a = -\frac{5}{2} \frac{m}{s^2}, \Delta x = 90m$$

$$v_o = \sqrt{1600 - 2 \times (-5) \times 90} = \sqrt{1600 + 900} = \sqrt{2500} = 50 \frac{m}{s}$$

$$v = v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} v_A = \frac{16-0}{6-4} = 8 \frac{m}{s} \\ v_B = \frac{16-40}{6-0} = -4 \frac{m}{s} \end{cases}$$

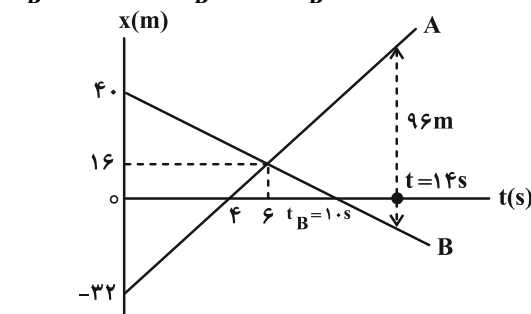
سپس رابطه سرعت متوسط را برای متحرک A در بازه زمانی صفر تا ۴s به کار می‌بریم و مکان اولیه متحرک A را به دست می‌آوریم:

$$v_A = \frac{0 - x_oA}{4-0} \xrightarrow{v_A = 8 \frac{m}{s}} 8 = \frac{-x_oA}{4} \Rightarrow x_oA = -32m$$

اکنون می‌توانیم معادله هر یک از دو متحرک را بنویسیم:

$$x = vt + x_o \Rightarrow \begin{cases} x_A = 8t - 32 \\ x_B = -4t + 40 \end{cases}$$

در لحظه t_B که متحرک B از مبدأ مکان می‌گذرد، جهت بردار مکان آن تغییر می‌کند.



در پایان، لحظه‌ای را که فاصله دو متحرک از یکدیگر ۹۶m می‌شود به دست می‌آوریم و اختلاف آن را با لحظه t_B حساب می‌کنیم:

$$x_A - x_B = 96 \Rightarrow 8t - 32 - (-4t + 40) = 96$$

$$12t = 168 \Rightarrow t = 14s$$

$$t - t_B = 14 - 10 = 4s$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست، صفحه‌های ۱۳ و ۱۴)

(محمود منصوری)

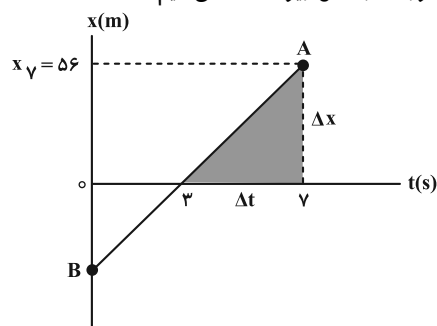
گزینه «۱»

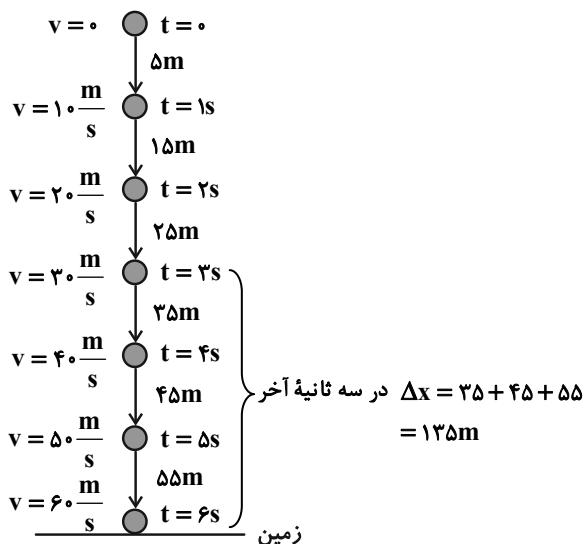
سرعت متوسط از ابتدای حرکت تا لحظه $t = 7s$ برابر $8 \frac{m}{s}$ است. بنابراین:

$$V_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow 8 = \frac{\Delta x}{7} \Rightarrow \Delta x = 56m$$

$$\Rightarrow x_7 - x_o = 56m \xrightarrow{x_o=0} x_7 = 56m$$

سرعت متحرک در لحظه $t = 7s$ برابر با شیب خط مماس بر نمودار در آن لحظه یعنی همان شیب پاره خط AB است. برای محاسبه شیب این خط از مثلث سایه‌خورده در شکل زیر استفاده می‌کنیم:





روش دوم: بعد از محاسبه تندی از روی انرژی جنبشی داریم:

$$v = 40 \frac{m}{s} \Rightarrow \text{۲ ثانیه مانده به آخر حرکت}$$

$$v = gt \Rightarrow 40 = 10(t-2) \Rightarrow t = 6s \quad \text{کل مدت زمان حرکت}$$

۳ ثانیه پایانی می‌شود از لحظه ۳s تا ۶s

$$\Delta y_{3s-6s} = \Delta y_{5s-6s} - \Delta y_{5s-3s} = \frac{1}{2} \times 10 \times (36 - 9) = 135m$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۵۱- گزینه «۳» (معصومه شریعت‌ناصری)

با توجه به اطلاعات مسئله می‌توانیم سرعت v_1 را به دست آوریم:

$$y_1 = \frac{1}{2} h \quad v_1 \quad S_{AB} = \frac{0 + v_1}{2} \Rightarrow 20 = \frac{v_1}{2}$$

$$y_2 = \frac{3}{4} h \quad v_2 \quad \Rightarrow v_1 = 40 \frac{m}{s}$$

گام دوم: باید رابطه بین Δt و $\Delta t_{AB} = t_1$ کل را به دست آوریم.

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1}{2} gt_1^2 \Rightarrow \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} gt_1^2 \\ y = \frac{1}{2} gt^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2} gt^2 \end{cases} \Rightarrow t = 2t_1$$

حال می‌توان سرعت v_2 را به دست آورد:

$$v_1 = gt_1 \Rightarrow 40 = 10t_1 \Rightarrow t_1 = 4s$$

$$v_2 = g(t) \Rightarrow v_2 = g(2t_1) = 10(2 \times 4) = 80 \frac{m}{s}$$

تندی متوسط در کل مسیر به این صورت محاسبه می‌شود:

$$S_{av} = \frac{v_2 + v_0}{2} = \frac{80 + 0}{2} = 40 \frac{m}{s}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۲۱ تا ۲۴)

۵۲- گزینه «۱» (مسام نادری)

هیچ کدام از عبارات درست نیست. علت نادرستی هر یک را بررسی می‌کنیم:
 الف) طبق قانون سوم نیوتون، اندازه نیرویی که اتومبیل به دوچرخه وارد می‌کند با نیروی وارد بر اتومبیل از طرف دوچرخه برابر است و فقط جهت آن‌ها متفاوت است و ربطی به ساکن بودن یا نبودن دوچرخه ندارد.

سرعت اولیه قطار به دست آمد، حالا می‌توان زمان عبور قطار از تونل را به

$$v = at + v_0 \Rightarrow t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{40 - 50}{-5} = 2s \quad \text{دست آورد:}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۷ و ۱۸)

۴۸- گزینه «۴» (عبدالرضا امینی نسب)

در بازه زمانی $t = 0$ تا $t = 2s$ ابتدا سرعت اولیه و سپس شتاب حرکت را محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta x = \frac{v_0 + v_2}{2} \Delta t \Rightarrow 32 - 24 = \frac{v_0 + 0}{2} \times 2 \Rightarrow v_0 = 8 \frac{m}{s}$$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_0}{2 - 0} = \frac{0 - 8}{2} = -4 \frac{m}{s^2}$$

برای محاسبه سرعت گذر از مبدأ مکان، به کمک رابطه مستقل از زمان در بازه زمانی (t' و $2s$) داریم:

$$v'^2 - v_2^2 = 2a \cdot \Delta x \Rightarrow v'^2 - 0 = 2(-4)(-32) \Rightarrow v'^2 = 4 \times 64$$

$$\Rightarrow v' = \pm 16 \frac{m}{s} \Rightarrow v' = -16 \frac{m}{s} \quad \text{قابل قبول}$$

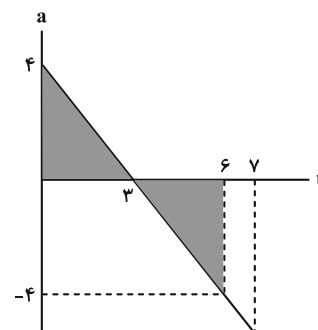
سرعت متوسط در حرکت شتابدار با شتاب ثابت را می‌توان از رابطه

$$\bar{v} = \frac{v_2 + v'}{2} = \frac{0 + (-16)}{2} = -8 \frac{m}{s} \quad \text{محاسبه کرد. داریم:}$$

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۱۵ تا ۲۱)

۴۹- گزینه «۲» (مسام نادری)

سطح زیر نمودار شتاب- زمان در یک بازه زمانی، تغییرات سرعت در آن بازه را به دست می‌دهد.



$$0 \text{ تا } 3s \Rightarrow \Delta v = \frac{1}{2} \times 3 \times 4 = 6 = v_3 - v_0 \xrightarrow{v_0=0} v_3 = 6 \frac{m}{s}$$

$$3s \text{ تا } 6s \Rightarrow \Delta v = \frac{1}{2} \times 3 \times -4 = -6 = v_6 - v_3$$

$$\xrightarrow{v_3=6 \frac{m}{s}} v_6 = 0 \frac{m}{s}$$

پس از $t = 0$ تا $t = 3s$ حرکت تندشونده و از $t = 3s$ تا $t = 6s$ حرکت کندشونده و در $t = 6s$ متحرک ساکن شده پس بعد از آن، حرکت از حالت سکون داریم که یک حرکت تندشونده است.

(فیزیک ۳- حرکت بر خط راست: صفحه‌های ۹ تا ۱۲)

۵۰- گزینه «۱» (مهروی شریفی)

ابتدا تندی گلوله را ۲ ثانیه قبل از برخورد به زمین محاسبه می‌کنیم:

$$K = \frac{1}{2} mv^2 \Rightarrow \frac{1}{2} \times 20 \times 10^{-3} \times v^2 = 16 \Rightarrow v = 40 \frac{m}{s}$$

اگر از راه جابه‌جایی‌های متوالی در زمان‌های مساوی سؤال را حل کنیم:

(امیرامیر میرسعید)

گزینه «۴» -۵۶

در حرکت آسانسور، مستقل از جهت حرکت، اگر جهت شتاب رو به بالا باشد، $F_N = m(g + a)$ و اگر جهت شتاب رو به پایین باشد، $F_N = m(g - a)$ است.

$$600 = m(10 + 2) \Rightarrow m = 50 \text{ kg}$$

$$F_N = m(10 - 2) = 50 \times 8 = 400 \text{ N}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه‌های ۳۸ و ۳۹)

(محمدرضا سورپی)

گزینه «۱» -۵۷

طبق رابطه زیر، شتاب گرانشی در سطح سیاره را به دست می‌آوریم:

$$g_P = \frac{GM_P}{R_P^2}, \quad g = \frac{GM_e}{R_e^2}$$

$$\Rightarrow \frac{g_P}{g} = \frac{M_P}{M_e} \times \left(\frac{R_e}{R_P}\right)^2 \xrightarrow{M = \rho V} \frac{g_P}{g} = \frac{\rho_P}{\rho_e} \times \frac{R_P}{R_e}$$

$$\frac{g_P}{g} = \frac{\rho_P}{\rho_e} \times \left(\frac{R_P}{R_e}\right)^2 \times \left(\frac{R_e}{R_P}\right)^2 \Rightarrow \frac{g_P}{g} = \frac{\rho_P}{\rho_e} \times \frac{R_P}{R_e}$$

$$\frac{g = 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}}{R_P = \frac{1}{3} R_e} \Rightarrow \frac{g_P}{9.8} = \frac{\rho_P}{\rho_e} \times \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{g_P}{9.8} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} \Rightarrow g_P = \frac{3}{2} \times 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$\Rightarrow g_P = \frac{3}{2} \times 9.8 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

حال جرم جسم را به دست می‌آوریم:

$$W = mg \xrightarrow{W = 490 \text{ N}} 490 = m \times 9.8 \Rightarrow m = 50 \text{ kg}$$

نهایت وزن جسم در سطح سیاره را حساب می‌کنیم:

$$F_P = m g_P \Rightarrow F_P = 50 \times \frac{3}{2} \times 9.8 = 735 \text{ N}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه ۵۶)

(عبدالرضا امینی نسب)

گزینه «۳» -۵۸

با توجه به شکل زیر، قانون دوم نیوتون را برای هر گلوله می‌نویسیم. داریم:



$$W - f_D = ma \Rightarrow a = \frac{W - f_D}{m}$$

$$\xrightarrow{W = mg} a = \frac{mg - f_D}{m}$$

$$a = g - \frac{f_D}{m}$$

 f_D : نیروی مقاومت هوا نامیده می‌شود.

با در نظر گرفتن یکسان بودن مقاومت هوا، هر چه m بیشتر باشد، شتاب حرکت بیشتر است. در نتیجه: $m_4 > m_3 > m_1 \Rightarrow a_4 > a_3 > a_1$

از طرفی طبق رابطه سرعت - جابه‌جایی می‌توانیم بنویسیم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a \cdot \Delta y$$

$$v^2 - 0 = 2ah \Rightarrow v = \sqrt{2ah} \xrightarrow{a_4 > a_3 > a_1} v_4 > v_3 > v_1$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه‌های ۳۲ تا ۳۵)

(مهمان راست‌پیمان)

گزینه «۴» -۵۹

با توجه به این که نیروی وزن با نیروی عمودی تکیه‌گاه متوازن است، پس نیروی کشش طناب تامین کننده نیروی مرکزگرا است.

$$F_{\text{net}} = T$$

(ب) شرط توازن نیروها، نبودن نیروی خالص است. ممکن است جسم در یک جهت ثابت و بر روی خط راست با شتاب در حال حرکت باشد. (مانند برخی از مسائل فصل ۱)

(پ) نیروهای کنش و واکنش همواره هم‌نوع‌اند، مثلاً هر دو الکتریکی‌اند یا مغناطیسی‌اند و یا ...

(ت) قانون اول را می‌توان از قانون دوم نتیجه گرفت. اگر در رابطه قانون دوم $(F_{\text{net}} = ma)$ شتاب صفر باشد، یعنی یا جسم ساکن است و یا سرعتش ثابت است و برآیند نیروهای وارد بر آن صفر است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه‌های ۳۰ تا ۳۵)

(سپیده‌ملیحه میرضایی)

گزینه «۴» -۵۳

بیشینه اندازه برآیند دو بردار، برابر مجموع اندازه آن‌هاست و کمینه اندازه برآیند دو بردار، برابر اختلاف اندازه آن‌هاست.

بنابراین اندازه برآیند نیروهای $F_1 = 50 \text{ N}$ و $F_2 = 35 \text{ N}$ ، حداکثر برابر 85 N و حداقل برابر 15 N است و می‌توان نوشت:

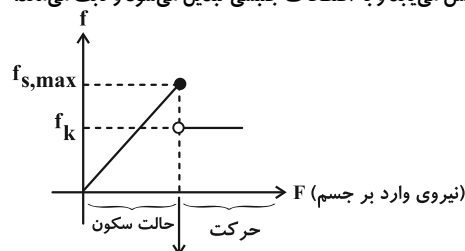
$$15 \leq F_{\text{net}} \leq 85 \Rightarrow 15 \leq ma \leq 85 \xrightarrow{m = 5 \text{ kg}} 3 \leq a \leq 17$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه ۳۳)

(محمدرضا شریفی)

گزینه «۲» -۵۴

با توجه به نمودار زیر با افزایش نیرو، اصطکاک زیاد شده به $f_{s, \text{max}}$ می‌رسد. سپس کاهش می‌یابد و به اصطکاک جنبشی تبدیل می‌شود و ثابت می‌ماند.



در آستانه حرکت

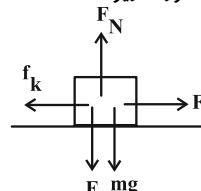
(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)

(معمومه شریعت ناصری)

گزینه «۲» -۵۵

برای حل این سؤال ابتدا بیشینه اصطکاک ایستایی را مشخص می‌کنیم.

- نیروهای وارد بر جسم به صورت زیر است:



$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow F + mg = F_N \Rightarrow F_N = 240 + (16 \times 10) = 400 \text{ N}$$

$$f_{s, \text{max}} = \mu_s F_N = 0.5 \times 400 = 200 \text{ N}$$

- با توجه به این که $F > f_{s, \text{max}}$ است پس جسم حرکت می‌کند.

$$f_k = \mu_k F_N = 0.4 \times 400 = 160 \text{ N}$$

$$F - f_k = ma \Rightarrow 240 - 160 = 16a \Rightarrow a = \frac{80}{16} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

مقدار شتاب را در رابطه سرعت جای گذاری می‌کنیم و سرعت را به دست می‌آوریم:

$$v = at + \overset{0}{v_0} = 5 \times 3 / 2 = 16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای، صفحه‌های ۳۹ تا ۴۳)



(سیده ملیحه میر صالحی)

گزینه ۲-۶۲

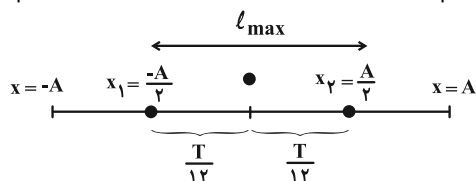
هنگامی که بردار مکان متحرک تغییر جهت می‌دهد، متحرک از نقطه تعادل نوسان عبور کرده و اندازه شتاب، انرژی پتانسیل و نیرو صفر بوده و پس از این لحظه افزایش می‌یابد تا در دو انتهای مسیر بیشینه شوند، بنابراین گزینه «۲» صحیح است.

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه ۶۳)

(محمدرضا سورپی)

گزینه ۲-۶۳

ابتدا دامنه نوسان را با توجه به بیشترین مسافت در مدت زمان $\frac{T}{6}$ به دست می‌آوریم. می‌دانیم برای این که در بازه زمانی $\Delta t < \frac{T}{4}$ بخواهیم بیشترین مسافت را داشته باشیم باید نقطه تعادل ($x=0$) وسط مسیر باشد. بنابراین داریم:



$$\Rightarrow l_{\max} = \frac{A}{4} - \left(-\frac{A}{4}\right) = A \xrightarrow{l_{\max}=1\text{ cm}} A = 1\text{ cm}$$

پس مسافت طی شده در یک دوره تناوب که برابر با $4A$ است را به دست می‌آوریم:

$$l = 4A \xrightarrow{A=1\text{ cm}} 4A = 4\text{ cm}$$

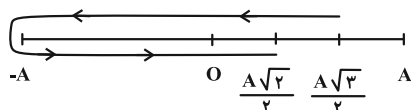
(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۳ و ۶۴)

(امیرامیر میرسعید)

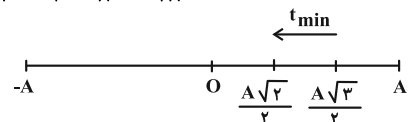
گزینه ۳-۶۴

در گام اول نسبت بیشترین سرعت متوسط به کمترین سرعت متوسط را می‌نویسیم و چون جابه‌جایی در هر دو حالت برابر است با هم ساده می‌شوند و می‌توان نوشت:

$$\frac{v_{\text{av max}}}{v_{\text{av min}}} = \frac{\frac{\Delta x}{t_{\min}}}{\frac{\Delta x}{t_{\max}}} = \frac{t_{\max}}{t_{\min}}$$



$$t_{\max} = \frac{T}{6} + \frac{T}{4} + \frac{T}{8} = \frac{38T}{48}$$



$$t_{\min} = \frac{T}{6} - \frac{T}{8} = \frac{2T}{48} = \frac{T}{24}$$

$$\frac{t_{\max}}{t_{\min}} = \frac{\frac{38T}{48}}{\frac{T}{24}} = \frac{38}{2} = 19$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج؛ صفحه‌های ۶۳ و ۶۴)

بنابراین:

$$T = \frac{mv^2}{R}$$

$$144 = \frac{8 \times v^2}{2} \Rightarrow v^2 = 36 \Rightarrow v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

از طرفی تندی حرکت جسم برابر است با:

$$v = r \left(\frac{2\pi}{T} \right)$$

$$6 = 2 \left(\frac{2 \times 3}{T} \right) \Rightarrow T = 2\text{ s}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه ۵۳)

گزینه ۲-۶۰

(زهره آقاممیری)

شتاب مرکزگرای ماهواره به دور زمین، شتاب گرانشی در محل ماهواره است:

$$\begin{cases} a_c = \frac{v^2}{r} \\ g_h = \frac{GM_e}{r^2} \end{cases} \xrightarrow{a_c = g_h} \frac{v^2}{r} = \frac{GM_e}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$$

یعنی تندی ماهواره در فاصله r از مرکز زمین با جذر r رابطه عکس دارد:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \xrightarrow{r=h+R_e} \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{h_1+R_e}{h_2+R_e}} \xrightarrow{h_1=R_e} \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{R_e+R_e}{1/42R_e+R_e}} = \sqrt{\frac{2}{1/42+1}} = \sqrt{\frac{2}{43/42}} = \sqrt{\frac{84}{43}} = \sqrt{\frac{1}{1/43}}$$

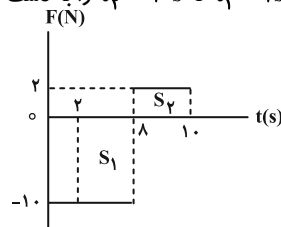
$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{R_e+R_e}{1/42R_e+R_e}} = \sqrt{\frac{2}{1/42+1}} = \sqrt{\frac{2}{43/42}} = \sqrt{\frac{84}{43}} = \sqrt{\frac{1}{1/43}}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \frac{1}{1/1} = \frac{1}{11}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۵۱ تا ۵۶)

گزینه ۲-۶۱

(محمدرضا سورپی)

تغییر تکانه جسم از $t_1 = 2\text{ s}$ تا $t_2 = 10\text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$t_2 = 10\text{ s} \text{ تا } t_1 = 2\text{ s} : \Delta p = -S_1 + S_2$$

$$= (-)((8-2)(10)) + ((10-8)) \times 2$$

$$\Rightarrow \Delta p = -60 + 4 = -56 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

پس تکانه جسم در لحظه $t_1 = 2\text{ s}$ را حساب می‌کنیم:

$$p_1 = mv \Rightarrow p_1 = 2 \times 5 = 10 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

در نهایت تکانه جسم در لحظه $t_2 = 10\text{ s}$ را به دست می‌آوریم:

$$\vec{\Delta p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \xrightarrow{\vec{p}_1 = 10 \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right) \vec{i}} -56 \vec{i} = \vec{p}_2 - 10 \vec{i}$$

$$\Rightarrow \vec{p}_2 = -46 \left(\frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}} \right) \vec{i}$$

(فیزیک ۳- دینامیک و حرکت دایره‌ای؛ صفحه‌های ۳۶ تا ۳۸)



۶۵- گزینه «۲»

(معمود منبری)

بسامد زاویه‌ای نوسانگر برابر است با: $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.4} \Rightarrow \omega = \Delta\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
 حال با استفاده از معادله مکان-زمان نوسانگر، اختلاف زمانی این دو مکان را به دست می‌آوریم:

$$x = A \cos(\omega t) \Rightarrow x = A \cos(\Delta\pi t)$$

$$\frac{x_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}A}{\text{حرکت کندشونده}} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}A = A \cos(\Delta\pi t_1)$$

$$\Rightarrow \frac{11\pi}{6} = \Delta\pi t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{11}{30} \text{ s} \quad \frac{x_2 = -\frac{A}{2}}{v > 0} \rightarrow -\frac{A}{2} = A \cos(\Delta\pi t_2)$$

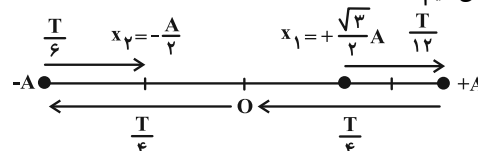
$$\Rightarrow \frac{10\pi}{3} = \Delta\pi t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{10}{15} \text{ s}$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{10}{15} - \frac{11}{30} = \frac{20-11}{30} = \frac{9}{30} = 0.3 \text{ s}$$

راه دوم: هنگامی حرکت نوسانگر کندشونده است که نوسانگر به سمت نقطه

بازگشت حرکت کند و با توجه به آن که $x_1 = +\frac{\sqrt{3}}{2}A$ است و حرکتش کندشونده، آن را روی نمودار مشخص می‌کنیم. حال در قسمت منفی مکان، زمانی سرعت مثبت است که نوسانگر به سمت مرکز نوسان حرکت کند و با توجه به آن که $x_2 = -\frac{A}{2}$ است و سرعتش مثبت، آن را روی نمودار

مشخص می‌کنیم:



$$\Delta t = \frac{T}{12} + \frac{T}{4} + \frac{T}{4} + \frac{T}{6} = \frac{9T}{12} \quad T = 0.4 \text{ s}$$

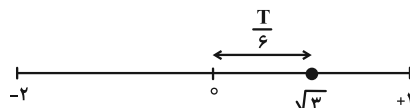
$$\Delta t = \frac{9 \times 0.4}{12} = 0.3 \text{ s}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۶)

۶۶- گزینه «۳»

(عبدالرضا امینی نسب)

معادله حرکت نوسانی هماهنگ ساده به صورت $x = A \cos(\omega t)$ می‌باشد. به کمک عدد روی محور افقی، دوره تناوب و سپس ω را محاسبه می‌کنیم، داریم:



$$t = 1/10 \text{ s} \Rightarrow \frac{3T}{4} + \frac{T}{6} = \frac{11}{10}$$

$$\frac{11T}{12} = \frac{11}{10} \Rightarrow T = 1/2 \text{ s} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{1/2} = \frac{\Delta\pi \text{ rad}}{3 \text{ s}}$$

$$x = 2 \cos\left(\frac{\Delta\pi}{3} t\right) \xrightarrow{t=1.0 \text{ s}} x = 2 \cos\left(\frac{\Delta\pi}{3}\right)$$

$$= 2 \cos\left(16\pi + \frac{2\pi}{3}\right) \Rightarrow x = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1 \text{ cm}$$

دقت کنید دامنه نوسان را برحسب cm جای‌گذاری کرده‌ایم. بنابراین پاسخ نهایی برحسب cm است.

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۶۷- گزینه «۲»

(معصومه شریعت ناصری)

می‌دانیم که انرژی جنبشی نوسانگر هنگام گذر از حالت تعادل بیشینه و برابر انرژی مکانیکی آن است. بنابراین با توجه به داده‌های مسئله می‌توان دامنه نوسان را به دست آورد:

$$E = K_m = 18 \text{ J}$$

با توجه به این که در صورت سؤال به ما دوره داده شده است، بنابراین می‌توان بسامد زاویه‌ای را به دست آورد.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0.1} = 20\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow E = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2$$

$$\xrightarrow{m=100 \text{ g}=0.1 \text{ kg}} 18 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times A^2 \times 400 \times \pi^2$$

$$\Rightarrow 18 = \frac{1}{2} \times 0.1 \times A^2 \times 400 \times \pi^2 \Rightarrow A^2 = 0.09 \Rightarrow A = 0.3 \text{ m}$$

$$\Rightarrow x = 0.3 \cos 20\pi t$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۶۳ تا ۶۵)

۶۸- گزینه «۴»

(عبدالرضا امینی نسب)

می‌دانیم اختلاف حداکثر و حداقل طول فنر، همان طول پاره‌خط نوسان است، بنابراین داریم:

$$L = 30 - 20 = 10 \text{ cm} \Rightarrow A = \frac{L}{2} = 5 \text{ cm} = 0.05 \text{ m}$$

از طرفی انرژی مکانیکی نوسانگر از رابطه $E = \frac{1}{2} k A^2$ به دست می‌آید که k ثابت فنر می‌باشد.

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times \left(\frac{5}{100}\right)^2 = \frac{1}{2} \times 200 \times 25 \times 10^{-4}$$

$$= 25 \times 10^{-2} \text{ J} = 0.25 \text{ J}$$

طبق قانون پایستگی انرژی $E = K + U$ ، انرژی جنبشی را محاسبه می‌کنیم:

$$E = K + U \Rightarrow 0.25 = K + 0.05 \Rightarrow K = 0.20 \text{ J}$$

در نهایت به کمک رابطه $K = \frac{1}{2} m v^2$ ، تندی وزنه را به دست می‌آوریم، داریم:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow 0.2 = \frac{1}{2} \times 0.2 \times v^2 \Rightarrow v^2 = 2 \Rightarrow v = \sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۶۵ تا ۶۷)

۶۹- گزینه «۴»

(سیدعلیه میرصالحی)

$$K_{\max} = 300 \text{ mJ} = 0.3 \text{ J}$$

با توجه به نمودار می‌توان نوشت:

در ادامه برای محاسبه دامنه نوسانگر به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$F_{\max} = kA \xrightarrow{F_{\max}=12 \text{ N}} kA = 12 \text{ N}$$

$$E = K_{\max} = \frac{1}{2} k A^2 \xrightarrow{kA=12 \text{ N}, K_{\max}=0.3 \text{ J}} 0.3 = \frac{1}{2} \times 12 \times A$$

$$\Rightarrow A = 0.05 \text{ m} \Rightarrow A = 5 \text{ cm}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه ۶۶)

۷۰- گزینه «۴»

(عبدالرضا امینی نسب)

برای جلوگیری از افتادن ساعت باید عملی انجام دهیم که تعداد نوسان‌های آن در یک زمان مشخص بیشتر شود، بنابراین باید دوره حرکت آن کوچک‌تر شود (به عبارت دیگر باید بسامد نوسانات افزایش یابد). در این صورت طبق رابطه

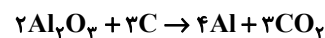
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \text{با } L \text{ کوچک‌تر یا } g \text{ بزرگ‌تر بشود که با کاهش دمای محیط، طول نخ آونگ کاهش می‌یابد.}$$

(فیزیک ۳- نوسان و موج: صفحه‌های ۶۷ و ۶۸)

شیمی

۷۱- گزینه «۱»

(سهراب صادقی زاده)



$$12\text{mol e}^- = \text{تعداد مول الکترون مبادله شده}$$

$$? \text{ mol CO}_2 = \frac{1}{8.06 \times 10^{24}} \times \frac{1 \text{ mole}^-}{6.02 \times 10^{23}} \times \frac{3 \text{ mol CO}_2}{12 \text{ mole}^-}$$

$$= 0.75 \text{ mol CO}_2$$



$$? \text{ g CaCO}_3 = 0.75 \text{ mol CO}_2 \times \frac{1 \text{ mol CaCO}_3}{1 \text{ mol CO}_2}$$

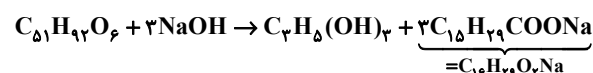
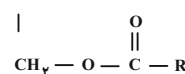
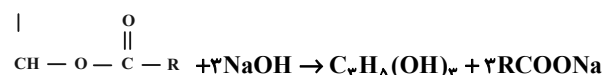
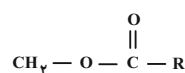
$$\times \frac{100 \text{ g CaCO}_3}{1 \text{ mol CaCO}_3} = 75 \text{ g CaCO}_3$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه ۶۱)

۷۲- گزینه «۳»

(علی امینی)

واکنش استرهای سه عاملی با سدیم هیدروکسید به شکل زیر است:



$$? \text{ kg NaOH} = 10^3 \text{ g استر} \times \frac{1 \text{ mol استر}}{800 \text{ g استر}}$$

$$\times \frac{3 \text{ mol NaOH}}{1 \text{ mol استر}} \times \frac{40 \text{ g NaOH}}{1 \text{ mol NaOH}} \times \frac{100 \text{ g محلول}}{30 \text{ g NaOH}}$$

$$\times \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} = 0.5 \text{ kg محلول NaOH}$$

(شیمی ۳- مولکولها در فرمت تدرستی: صفحه های ۵ و ۶)

۷۳- گزینه «۲»

(مرتضی زارعی)

در یک پاک کننده غیرصابونی با فرمول زیر می توان ۲ اتم کربن مشخص کرد که به هیچ اتم هیدروژنی متصل نشده اند. (مورد اول درست)



• یک پاک کننده غیرصابونی می تواند در زنجیر هیدروکربنی خود دارای پیوند $\text{C}=\text{C}$ باشد. پس واژه حداکثر اشتباه بوده و باید حداقل ذکر شود. (مورد دوم نادرست)

- پاک کننده غیرصابونی در آب سخت واکنش نمی دهد (مورد سوم نادرست)
- بخش ناقص پاک کننده غیرصابونی که شامل زنجیر R و حلقه هیدروکربنی است ۴ اتم هیدروژن بیشتر از زنجیر آلکیل دارد. (مورد چهارم نادرست)

(شیمی ۳- مولکولها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۰ و ۱۱)

۷۴- گزینه «۳»

(میلاد شیخ الاسلامی)

بررسی عبارت ها:

(آ) نادرست. سوانت آرنیوس اولین نظریه اسید و بازها را ارائه نداد بلکه اولین نظریه ای که مبنای علمی داشت را ارائه کرد.

(ب) نادرست. در منابع علمی بجای $\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$ از $\text{H}^+(\text{aq})$ استفاده می شود. (پ) نادرست. علاوه بر فلزات، مغز مداد که از جنس گرافیت (دگرشکل کربن) بوده و یک نافلز است، رسانای الکترونی می باشد.

(ت) درست. زیرا مولکولهای ماده الکترولیت به طور کامل در آب به یون تبدیل شده اند و هیچ مولکول یونیده نشده ای مشاهده نمی شود.

(ث) نادرست. اسیدها و بازها براساس میزان یونشی که در آب دارند به دو دسته ضعیف و قوی تقسیم می شوند.

(شیمی ۳- مولکولها در فرمت تدرستی: صفحه های ۱۱ تا ۱۹)

۷۵- گزینه «۲»

(امسان ابروانی)

با توجه به این که هر دو محلول در دمای 25°C می باشند داریم:

$$\text{pH} = -\log([\text{H}_3\text{O}^+]) \quad \text{محلول اول:}$$

$$\Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_1 = 10^{-\text{pH}} \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_1 = 10^{-4/2}$$

$$[\text{H}_3\text{O}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \quad \text{محلول دوم:}$$

$$\Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_2 = 10^{-\text{pH}} \Rightarrow [\text{H}_3\text{O}^+]_2 = 10^{-8/5}$$

$$\Rightarrow [\text{OH}^-]_2 = \frac{10^{-14}}{[\text{H}_3\text{O}^+]_2} = \frac{10^{-14}}{10^{-8/5}} = 10^{-5/5}$$

$$\Rightarrow \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_1}{[\text{OH}^-]_2} = \frac{10^{-4/2}}{10^{-5/5}} = 10^{1/2} = 10^{0.5} \times 10^{-0.5}$$

$$100 \times \frac{1}{5} = 20$$

(شیمی ۳- مولکولها در فرمت تدرستی: صفحه های ۲۴ تا ۲۸)

۷۶- گزینه «۲»

(علی امینی)

$$\text{مولاریته} = \frac{1/2 \text{ g CH}_3\text{COOH}}{1 \text{ L محلول}} \times \frac{1 \text{ mol CH}_3\text{COOH}}{60 \text{ g CH}_3\text{COOH}}$$

$$= 2 \times 10^{-2} \frac{\text{mol}}{\text{L}} \quad \text{مولاریته اولیه اسید:}$$

$$\xrightarrow{\text{in } 25^\circ\text{C}} [\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$$

$$\frac{[\text{H}^+]}{[\text{OH}^-]} = 3/6 \times 10^7 \Rightarrow [\text{H}^+] \times \frac{[\text{H}^+]}{3/6 \times 10^7} = 10^{-14}$$

$$\Rightarrow [\text{H}^+]^2 = 36 \times 10^{-8} \Rightarrow [\text{H}^+] = 6 \times 10^{-4} \frac{\text{mol}}{\text{L}}$$



گزینۀ (۳):

$$\frac{[\text{OH}^-]}{[\text{H}^+]} = 4 \times 10^{-6}$$

$$[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14}$$

$$\Rightarrow [\text{H}^+]^2 \times 4 \times 10^{-6} = 10^{-14} \Rightarrow [\text{H}^+] = 5 \times 10^{-5}$$

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 5 \times 10^{-5} = 5 - 0.7 = 4.3$$

گزینۀ (۴): مطابق متن صفحه ۲۶ کتاب درسی درست است.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۲۴ و ۲۸ تا ۲۸)

۷۹- گزینۀ «۳»

(معمرد، زهره‌نر)

تنها مورد (ت) نادرست است.

بررسی مورد (الف): در دما و غلظت ثابت هر چه باز قوی‌تر باشد درجه یونش آن نیز بیشتر است و در نتیجه تعداد بیشتری یون در محلول وجود دارد و رسانایی الکتریکی محلول بیشتر است.

بررسی درستی مورد (ب): هر چه محلول یک باز خصلت بازی بیشتری داشته باشد، با افزودن مقدار معینی از یک اسید یا باز به آن pH تغییر کمتری می‌کند، زیرا میزان یون‌های افزوده شده $[\text{OH}^-]$ در مقایسه با یون‌های اولیه $[\text{OH}^-]$ ناچیز است.

بررسی درستی مورد (پ): برای مثال در واکنش خنثی شدن HCl و NaOH ، یون‌های Na^+ و Cl^- تشکیل نمک محلول NaCl و در خنثی شدن $\text{Ba}(\text{OH})_2$ و H_2SO_4 تشکیل نمک نامحلول BaSO_4 را می‌دهند. بررسی نادرستی مورد (ت): در مخلوط نهایی باید غلظت H_3O^+ و OH^- برابر شود، نه صفر.

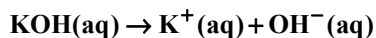
(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۲۹ و ۳۰)

۸۰- گزینۀ «۲»

(عسین ناصری‌ثانی)

بررسی گزینه‌ها:

گزینۀ «۱»: از آنجا که پتاسیم هیدروکسید باز قوی است و به‌طور کامل تفکیک می‌شود، بنابراین با توجه به معادله تفکیک آن غلظت یون هیدروکسید با غلظت پتاسیم هیدروکسید برابر خواهد بود:



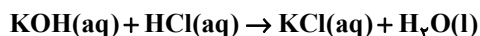
$$[\text{OH}^-] = [\text{KOH}] = \frac{0.02 \text{ mol}}{0.1 \text{ L}} = 0.2 \text{ mol.L}^{-1}$$

گزینۀ «۲»:

$$[\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{[\text{OH}^-]} = \frac{10^{-14}}{0.2} = 5 \times 10^{-14} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = -\log 5 \times 10^{-14} = 13.7$$

گزینۀ «۳»: با توجه به واکنش:



$$\begin{aligned} ? \text{ mL HCl} &= 0.1 \text{ L KOH} \times \frac{0.2 \text{ mol KOH}}{1 \text{ L KOH}} \times \frac{1 \text{ mol HCl}}{1 \text{ mol KOH}} \\ &\times \frac{1 \text{ L HCl}}{0.5 \text{ mol HCl}} \times \frac{1000 \text{ mL HCl}}{1 \text{ L HCl}} = 40 \text{ mL HCl} \end{aligned}$$

$$\alpha\% = \frac{[\text{H}^+]}{[\text{CH}_3\text{COOH}]_0} \times 100 = \frac{6 \times 10^{-4}}{2 \times 10^{-2}} \times 100 = 3\%$$

$$\times 100 = 3\%$$

$$\begin{aligned} K_a &= \frac{M\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{\text{تقریب}} K_a \approx M\alpha^2 \\ &= 2 \times 10^{-2} \times (3 \times 10^{-2})^2 = 1.8 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۱۹، ۲۳، ۲۶ و ۲۷)

۷۷- گزینۀ «۲»

(رضا سلیمانی)

عبارت اول، دوم درست هستند.

بررسی همه عبارت‌ها:

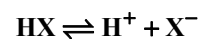
عبارت اول: درجه یونش HX نصف درجه یونش HY است.

$$\text{HX} : [\text{H}^+] = M\alpha \Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{10}{80} \alpha$$

$$\text{HY} : [\text{H}^+] = M\alpha \Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{10}{160} \alpha$$

عبارت دوم: چون مقدار یون هیدرونیوم در هر دو محلول برابر است غلظت آنیون‌های دو محلول نیز یکسان است.

عبارت سوم:



$$\frac{1}{8} - x \quad x \quad x$$



$$\frac{1}{16} - x \quad x \quad x$$

با توجه به معادله تفکیک دو اسید مجموع شمار گونه‌های متفاوت است.

عبارت چهارم: چون HY اسید قوی‌تری بوده میزان K_a آن از HX بیشتر است. عبارت پنجم: چون غلظت یون هیدرونیوم برابر است، در نخستین لحظه، سرعت واکنش نوار منبذیم با محلول هر دو ظرف یکسان است. ولی در نهایت گاز هیدروژن یکسانی آزاد نمی‌شود چون مقدار مول اولیه اسیدها با یکدیگر برابر نیست.

(شیمی ۳- مولکول‌ها در فرمت تندرستی: صفحه‌های ۴، ۱۵، ۱۹، ۲۲، ۲۴ و ۲۵)

۷۸- گزینۀ «۲»

(مبینا شرافتی‌پور)

بررسی همه عبارت‌ها:

گزینۀ (۱):

$$3 / 78 \text{ g HNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol HNO}_3}{63 \text{ g HNO}_3} = 0.06 \text{ mol HNO}_3$$

$$[\text{HNO}_3] = [\text{H}^+] = \frac{6 \times 10^{-2} \text{ mol}}{5 \text{ L}} = 12 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[\text{H}^+][\text{OH}^-] = 10^{-14} \Rightarrow [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{12 \times 10^{-3}}$$

$$= 8.33 \times 10^{-12}$$

گزینۀ (۲): شیر ترش شده، مرکبات و آب گازدار هر سه اسیدی بوده و سبب قرمز شدن رنگ کاغذ pH می‌شوند.



گزینه «۴»:

$$\frac{1 \text{ mol KOH}}{56 \text{ g KOH}} \times \frac{2}{8} \text{ g KOH} = ? \text{ mol KOH (اضافه شده)}$$

$$= 0.05 \text{ mol KOH}$$

$$\text{در محلول جدید KOH} = 0.05 \text{ mol} + 0.05 \text{ mol}$$

$$= 0.1 \text{ mol}$$

$$[\text{OH}^-] = [\text{KOH}] = \frac{0.1 \text{ mol}}{0.1 \text{ L}} = 1 \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\frac{[\text{OH}^-]_2}{[\text{OH}^-]_1} = \frac{0.1}{1} = \frac{1}{10}$$

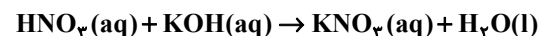
(شیمی ۳- مولکولها در فرمت تدرستی: صفحه‌های ۲۸ تا ۳۱)

۸۱- گزینه «۴»

(رضا سلیمانی)

در اثر انحلال N_2O_5 در آب، واکنش زیر:

نیتریک اسید تولید می‌شود که این محلول مطابق واکنش:



با محلول پتاسیم هیدروکسید (پتاس سوزآور) خنثی می‌شود.

ابتدا مقدار مول N_2O_5 تولید و حل شده در آب را به کمک حجم و pH

پتاس سوزآور محاسبه می‌کنیم:

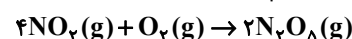
$$\text{KOH} : \text{pH} = 12.8$$

$$[\text{KOH}] = [\text{OH}^-] = 10^{-\text{pOH}} = 10^{-2+14-12.8} = 10^{-1.8}$$

$$= 2 \times 10^{-2} \times 10^{-2} = 4 \times 10^{-4} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$? \text{ mol N}_2\text{O}_5 = 4 \text{ L KOH}(\text{aq}) \times \frac{6 \times 10^{-2} \text{ mol KOH}}{1 \text{ L KOH}(\text{aq})}$$

$$\times \frac{1 \text{ mol HNO}_3}{1 \text{ mol KOH}} \times \frac{1 \text{ mol N}_2\text{O}_5}{2 \text{ mol HNO}_3} = 0.12 \text{ mol N}_2\text{O}_5$$

سپس به کمک معادله واکنش تولید N_2O_5 و O_2 ، مقدار مول O_2 مصرف شده در واکنش را به دست می‌آوریم:

$$? \text{ mol O}_2 = 0.12 \text{ mol N}_2\text{O}_5 \times \frac{1 \text{ mol O}_2}{2 \text{ mol N}_2\text{O}_5}$$

$$= 0.06 \text{ mol O}_2$$

در انتها، با توجه به واکنش کلی برقافت آب، جرمی از آب که برقافت شده را محاسبه می‌کنیم:



$$? \text{ g H}_2\text{O} = 0.06 \text{ mol O}_2 \times \frac{2 \text{ mol H}_2\text{O}}{1 \text{ mol O}_2}$$

$$\times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} = 2.16 \text{ g H}_2\text{O}$$

(شیمی ۳- مولکولها در فرمت تدرستی: صفحه‌های ۱۶ و ۳۰ تا ۳۲)

۸۲- گزینه «۳»

(محمدرضا پیمشیری)

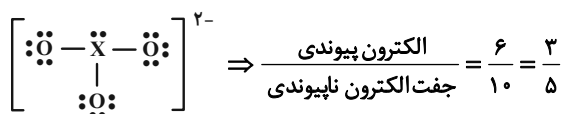
میان مولکولهای اسید چرب نیروی وان دروالسی و هیدروژنی وجود دارد.

(شیمی ۳- مولکولها در فرمت تدرستی: صفحه‌های ۲، ۴ تا ۷)

۸۳- گزینه «۱»

(محمدرضا صادقی)

X از گروه ۱۶ جدول دوره‌ای خواهد بود.



(شیمی ۳- آرایش و رخاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۳۳ و ۵۳)

۸۴- گزینه «۱»

(پروا سوری‌لکی)

گزینه «۱»: محصول نهایی روی هیدروکسید است. (نادرست)

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه «۲»: آهن در این واکنش نقشی ندارد. (درست)

گزینه «۳»: در محلول الکترولیت این شکل یون هیدروکسید تولید می‌شود و

خاصیت بازی دارد و رنگ کاغذ پی اچ آبی رنگ می‌شود. (درست)

گزینه «۴»: در محیط اسیدی قدرت اکسندگی اکسیژن بیشتر است و

خوردگی به میزان بیشتری رخ می‌دهد. (درست)

(شیمی ۳- آرایش و رخاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۵۷ و ۵۹)

۸۵- گزینه «۱»

(مفسر بابامیری)

بررسی موارد:

مورد اول: نیم سلول تأمین کننده الکترون (آند)، جایی است که اتم‌های فلزی،

الکترون از دست داده و به شکل کاتیون وارد الکترولیت می‌شوند.

مورد دوم: یون‌ها در کاتد، با گرفتن الکترون کاهش یافته و روی تیغه قرار

می‌گیرند و باعث افزایش جرم تیغه می‌شوند.

مورد سوم: نادرست؛ در سلول‌های الکتروشیمیایی، کاتیون‌ها و الکترون‌ها به

سمت کاتد و آنیون‌ها به سمت آند حرکت می‌کنند.

مورد چهارم: نادرست؛ به‌طور مثال اگر یک مول $\text{Zn}(\text{NO}_3)_2$ واردمحلول شود و یک مول $\text{Cu}(\text{NO}_3)_2$ از محلول خارج شود، جرم محلول

الکترولیت ۱ گرم زیاد می‌شود.

(شیمی ۳- آرایش و رخاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۴۴ تا ۴۶)

۸۶- گزینه «۳»

(مهمر فائزینیا)

موارد دوم و سوم نادرست هستند.

بررسی تمام موارد:

مورد اول: نیم‌واکنش اکسایش در آند انجام می‌شود و آند متصل به قطب

مثبت باتری می‌باشد.

مورد دوم: در یک سلول الکترولیتی، هیچکدام از نیم‌واکنش‌های آندی و

کاتدی به‌طور طبیعی انجام نمی‌شوند.

مورد سوم: نقره کلرید در آب نامحلول است و نمی‌تواند به عنوان الکترولیت

برای این سلول انتخاب شود.

مورد چهارم: چون نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش در این سلول، عکس

یکدیگر هستند لذا هر مقدار مول (کاتیون نقره) که از آند این سلول آزاد

می‌شود، در کاتد این سلول کاهش می‌یابد. بنابراین غلظت کاتیون‌های نقره

در محلول الکترولیت این سلول به تقریب ثابت می‌ماند.

(شیمی ۳- آرایش و رخاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۶۰ و ۶۲)

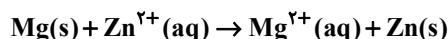


۸۷- گزینه «۲»

(پویا رستگاری)

با توجه به صورت سوال متوجه میشویم که E° فلز منیزیم از E° روی کوچک تر بنابراین قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به روی دارد.

گزینه (۱): قدرت اکسندگی Zn^{2+} از قدرت اکسندگی Mg^{2+} بیشتر است.
گزینه (۲): واکنش انجام شده در این سلول به صورت زیر است:



به ازای هر ۲ مول الکترون مبادله شده ۲۴ گرم (۱ مول) از جرم تیغه منیزیمی کاسته و ۶۵ گرم (۱ مول) به جرم تیغه روی افزوده می شود بنابراین تفاوت جرم تیغه ها برابر ۸۹ گرمی شود:

$$\frac{1 \text{ mole}}{6.02 \times 10^{23}} \times \frac{2}{40.8 \times 10.24} = \text{تفاوت جرم تیغه ها ?}$$

$$\times \frac{89 \text{ g}}{2 \text{ mole}} = 178 \text{ g}$$

گزینه (۳): الکترون ها در سلول های گالوانی از سمت آند به سمت کاتد حرکت می کنند که در اینجا منیزیم نقش آند و روی نقش کاتد را ایفا می کند.

گزینه (۴): چون قدرت کاهندگی منیزیم نسبت به روی بیشتر است بنابراین در مواجهه Zn^{2+} با فلز منیزیم، منیزیم با آن واکنش داده و Zn^{2+} را می کاهد، پس نمی توانیم محلول روی کلرید را در ظرفی از جنس منیزیم نگهداری کنیم.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه ۳۷)

۸۸- گزینه «۱»

(امیرمسین طیبی)

مورد اول) برقکافت جزو قلمروی تولید و بهبود خواص مواد از دانش الکتروشیمی است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۳۷ تا ۳۹)

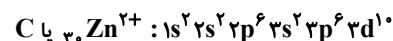
۸۹- گزینه «۱»

(عامر بزرنگر)

$$\left. \begin{array}{l} \text{A: اتم روی} \\ \text{B: اتم های اکسیژن در مولکول } O_2 \\ \text{C: یون } Zn^{2+} \\ \text{D: یون } O^{2-} \end{array} \right\}$$

مورد (پ): C همان Zn^{2+} است و یون پایداری است که به آرایش هیچ گاز نجیبی نرسیده است.

مورد (ت):

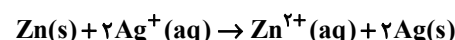


(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۳۷ تا ۵۰)

۹۰- گزینه «۳»

(حسن رعمتی کولنده)

مطابق شکل Zn آند و Ag کاتد است زیرا الکترون ها از طریق سیم از آند به کاتد جابه جا می شوند.



با توجه به واکنش، به ازای مبادله ۲ مول الکترون مقدار ۶۵ گرم از جرم تیغه Zn کاسته شده و مقدار $2 \times 108 = 216$ گرم به جرم تیغه Ag افزوده می شود.

تغییر جرم دو تیغه $151 = 216 - 65$ گرم می باشد.

$$20 / 22 - (10 / 8 + 6 / 5) = 3 / 0.2 \text{ g}$$

$$? \text{ mole} = 3 / 0.2 \text{ g} \times \frac{2 \text{ mole}}{151 \text{ g}} = 0.04 \text{ mole}^-$$

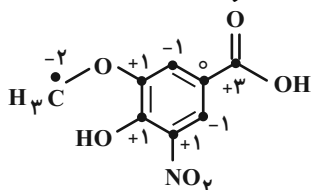
در سلول های گالوانی جهت انتقال کاتیون ها از طریق دیواره متخلخل از ظرف آندی به سمت ظرف کاتدی می باشد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه ۴۵)

۹۱- گزینه «۲»

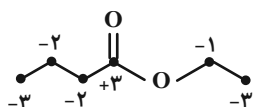
(دانیال علی دوست)

تنوع عدد اکسایش کربن: ۲-، ۱-، ۰، ۱، ۲، ۳، صفر

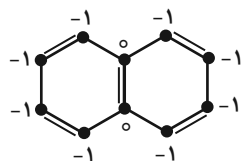


قسمت اول سوال: تنوع عدد اکسایش کربن: ۵ (رد گزینه های ۱ و ۳)
اتیل بوتانوات:

تنوع عدد اکسایش کربن: ۳، ۲، ۱، ۰، ۳-، صفر



تنوع عدد اکسایش کربن: ۱-، صفر
نفتالن:



تنوع عدد اکسایش کربن در اتیل بوتانوات، یکی از کمتر از همین تنوع مطرح شده در سوال می باشد.

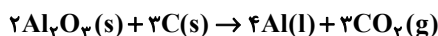
(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی؛ صفحه های ۵۲ و ۵۳)

۹۲- گزینه «۱»

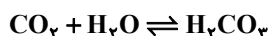
(عامر بزرنگر)

تمام موارد درست هستند.

مورد (آ): درست، واکنش کلی فرآیند هال به صورت:



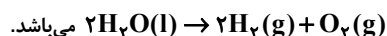
می باشد. گاز تولید شده همان CO_2 است که با ورود به آب مطابق واکنش زیر، کربنیک اسید ایجاد می کند:



مورد (ب): قاشق فلزی نقش کاتد (قطب منفی) و نقره نقش آند (قطب مثبت) را خواهد داشت.

مورد (پ): با توجه به شکل صفحه ۵۶ کتاب درسی درست است.

مورد (ت): واکنش کلی برقکافت آب به صورت:



گزینه (۲): درست- هرچه E° یک عنصر بیشتر باشد قدرت اکسندگی کاتیون آن نیز بیشتر است

گزینه (۳): نادرست- بین این دو عنصر عدد اتمی Mn کمتر از Cu می باشد و Mn آند سلول را می سازد.

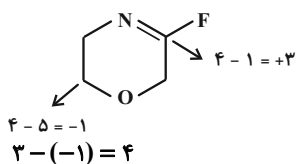
گزینه (۴): درست- در سلول گالوانی طلا و کروم، نیم سلول آندی مربوط به Cr می باشد در نتیجه ابتدا $[Cr^{3+}]$ در آند افزایش یافته پس از مدتی از طریق دیواره متخلخل کاتیون ها به سمت کاتد می روند در نتیجه با گذشت زمان $[Cr^{3+}]$ افزایش می یابد.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه های ۴۴ تا ۴۹)

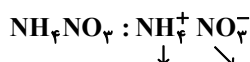
(امیرمسین طبیی)

۹۶- گزینه «۳»

موارد اول و سوم و چهارم به درستی بیان شده اند؛
مورد اول: درست



مورد دوم: نادرست

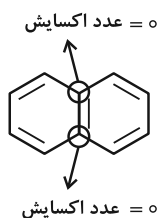


$$x + 4(+1) = +1 \quad y + 3(-2) = -1$$

$$\Rightarrow x = -3 \quad \Rightarrow y = +5$$

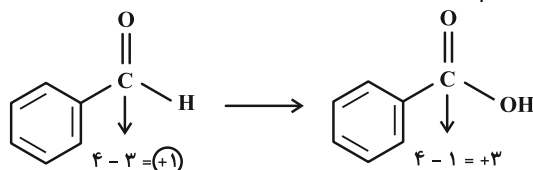
میانگین عدد اکسایش اتم های نیتروژن در آمونیوم نترات برابر با +۱ است ولی در آمونیوم نترات اتم نیتروژنی با عدد اکسایش +۱ وجود ندارد.

مورد سوم: درست



$$20\% = \frac{2}{10} \times 100 = 20\% \text{ درصد اتم های کربن که عدد اکسایش صفر دارند}$$

مورد چهارم: درست



(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه های ۵۲ و ۵۳)

(معمرفا جمشیری)

۹۷- گزینه «۲»

$$\left\{ \begin{array}{l} Cu \rightarrow \text{قطب منفی} \\ Pt \rightarrow \text{قطب مثبت} \end{array} \right\} \text{سلول الکترولیتی}$$

$$E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}} = E^\circ_{\text{سلول}} \Rightarrow E^\circ_{\text{کاتد}} = E^\circ_{\text{آند}} + E^\circ_{\text{سلول}}$$

$$= 0 / 34 - 1 / 20 = -0 / 86$$

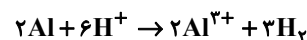
گاز تولید شده در کاتد (گاز H_2) دو برابر گاز تولید شده در آند (گاز O_2) حجم دارد زیرا ضریب H_2 دو برابر ضریب O_2 می باشد.
(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه های ۵۴ تا ۵۶ و ۶۰ تا ۶۳)

(شاهر صابری)

۹۳- گزینه «۴»

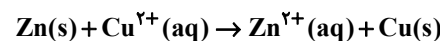
الف) همه انواع واکنش های اکسایش و کاهش انرژی آزاد نمی کنند، مانند برقکافت که با صرف انرژی یک واکنش اکسایش و کاهش انجام می دهد.
ب) مس نخستین عنصری است که لایه سوم آن کاملاً پر است و قدرت کاهندگی کمتری نسبت به آهن دارد.

پ) هنگامی غلظت H^+ می تواند با Al^{3+} برابر شود که H^+ مصرف و Al^{3+} تولید شود و چون غلظت H^+ کاهش می یابد، سرعت واکنش کم می شود.



H^+ مصرف و Al^{3+} تولید می شود و چون غلظت H^+ کاهش می یابد سرعت واکنش کم می شود.

ت) چون ضریب Zn^{2+} و Cu^{2+} برابر است، پس مجموع غلظت آن ها در تمام طول واکنش برابر است.



(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه های ۴۱، ۴۲ و ۴۷)

(امیرمسین طبیی)

۹۴- گزینه «۳»

گزینه (۱): درست- به کاتد این سلول یک نوع گاز (O_2) وارد می شود. اگر بخشی از O_2 وارد واکنش نشود، به همراه H_2O تولیدی از کاتد خارج می شود. در نتیجه ممکن است دو نوع گاز از کاتد خارج شود.

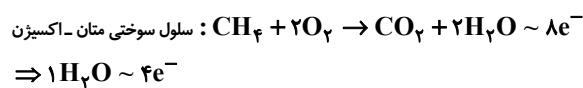
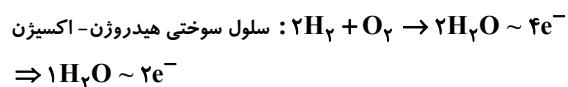
گزینه (۲): درست- الکترون ها از مدار بیرونی و پروتون ها از طریق غشای مبادله کننده پروتون به سمت کاتد می روند

گزینه (۳): نادرست- اکسندگی گاز اکسیژن (O_2)، کاهنده گاز H_2 می باشد.



شمار جفت الکترون های پیوندی در هر مولکول اکسندگی، ۲ برابر شمار این جفت الکترون ها در هر مولکول کاهنده است.

گزینه (۴):



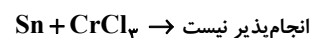
الکترون های عبوری از مدار بیرونی به ازای تولید هر مول H_2O ، ۲ برابر شده است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه های ۵۰ تا ۵۳)

(امیرمسین طبیی)

۹۵- گزینه «۳»

گزینه (۱): درست- قدرت کاهندگی Sn از Cr کمتر است در نتیجه واکنش رخ نمی دهد پس می توان محلولی از کروم (III) کلرید را در ظرفی از جنس Sn نگهداری کرد.





$$? g Zn : \circ / 6 mol Fe^{2+} \times \frac{1 mol Zn}{1 mol Fe^{2+}} \times \frac{65 g Zn}{1 mol Zn} \\ = 39 g Zn$$

در نتیجه در تیغه اولیه ۳۹g فلز روی و ۴۱g فلز مس وجود داشته است.

جرم Zn مصرفی - جرم Fe رسوب کرده + جرم اولیه تیغه : جرم نهایی تیغه

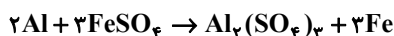
$$= 80 + 33 / 6 - 39 = 74 / 6 g$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۴۲ تا ۴۴)

(امیرمسین طیبی)

۱۰۰- گزینه «۱»

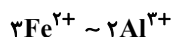
ابتدا واکنش را موازنه کرده و میزان تغییر جرم به ازای ضرایب (Δm) را محاسبه می‌کنیم:



جرم Al مصرفی - جرم Fe رسوب کرده

$$= (3 \times 56 \times \frac{1}{3}) - (2 \times 27) = 84 - 54 = 30 g$$

در لحظه مشخص شده بر روی نمودار، غلظت $[Fe^{2+}]$ با $[Al^{3+}]$ برابر شده است.



مقدار اولیه : a

تغییرات مول : $-3x$ $+2x$

نهایی : $a-3x$ $2x$

$$\Rightarrow \text{در لحظه } t_1 : a - 3x = 2x \Rightarrow a = 5x$$

$$(R) = \frac{\text{تغییرات}}{\text{مقدار اولیه}} \times 100 = \text{درصد پیشرفت واکنش}$$

$$= \frac{3x}{5x} \times 100 = 60\%$$

جرم اولیه تیغه را m در نظر بگیریم:

$$? g Al : \circ / 27 g Al \times \frac{1 mol Al}{27 g Al} \times \frac{60}{100}$$

$$\times \frac{30 g \Delta m}{27 mol Al} = \frac{m}{3} g$$

$$\% 100 = \frac{\text{تغییرات جرم تیغه}}{\text{جرم تیغه اولیه}} \times 100$$

m

$$= \frac{3}{m} \times 100 \approx \% 33$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۴۴ و ۴۵)

$$\begin{cases} \text{آند} \rightarrow Zn \\ \text{کاتد} \rightarrow Al \end{cases} \Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}} = E^\circ_{\text{کاتد}} - E^\circ_{\text{آند}}$$

$$\text{سلول گالوانی نیست} \Rightarrow -0.9 = -0.76 - (-0.66) = -0.1 / 66$$

$$\begin{cases} Zn \rightarrow \text{قطب منفی} \\ Al \rightarrow \text{قطب مثبت} \end{cases} \Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}}$$

$$\text{چنین سلولی، الکترولیتی نیست} \Rightarrow 0.9 = 0.76 - (-0.66) = 0.1 / 66$$

$$\begin{cases} Zn \rightarrow \text{قطب منفی} \\ Cu \rightarrow \text{قطب مثبت} \end{cases} \Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}} = -0.76 - (0.34) = -1.1V$$

$$\begin{cases} \text{آند} \rightarrow Al \\ \text{کاتد} \rightarrow Pt \end{cases} \Rightarrow E^\circ_{\text{سلول}} = 1.20 - (-0.66) = 2.86V$$

E° سلول‌های الکترولیتی منفی و E° سلول گالوانی مثبت است.

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۴۷ و ۴۸)

۹۸- گزینه «۲»

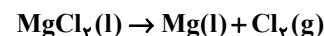
(فامر صابری)

ابتدا باید حجم مولی گازها را در شرایط سوال محاسبه کنیم:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{1 \times 22 / 4}{273} = \frac{2 \times V_2}{273 + 39}$$

$$\Rightarrow V_2 = 12 / 8 \frac{L}{mol}$$

در معادله برقکافت منیزیم کلرید ۲ مول الکترون مبادله می‌شود.



$$? L CO_2 = 9 / 0.3 \times 10^{24} e^- \times \frac{1 mol e^-}{6.02 \times 10^{23} e^-} \times \frac{1 mol Cl_2}{2 mol e^-}$$

$$\times \frac{12 / 8 L Cl_2}{1 mol Cl_2} = 96 L Cl_2$$

(شیمی ۳- آسایش و رفاه در سایه شیمی: صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

۹۹- گزینه «۴»

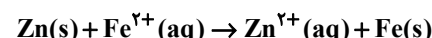
(امیرمسین طیبی)

می‌دانیم که قدرت کاهندگی آهن از مس بیشتر و از روی کمتر است؛ در نتیجه تنها Zn می‌تواند با $FeSO_4$ واکنش دهد. از اطلاعات سوال در می‌یابیم که پس از پایان واکنش غلظت Fe^{2+} به نصف رسیده است؛ این مطلب به این معنا است که تمام جرم Zn موجود در آلیاژ وارد واکنش شده است.

$$Fe^{2+} : \circ / 6 L \times \frac{2 mol}{L} = 12 mol$$

$$Fe^{2+} : \circ / 6 L \times \frac{1}{2} \frac{2 mol}{L} = 6 mol$$

$$\Rightarrow Fe^{2+} : \circ / 6 L \times \frac{1}{2} \frac{2 mol}{L} = 6 mol$$



$$? g Fe : \circ / 56 g Fe \times \frac{1 mol Fe}{56 g Fe} \times \frac{56 g Fe}{1 mol Fe}$$

$$= 33 / 6 g Fe$$